NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

Polynômes symétriques - racines d'un polynôme.

I) Polynômes symétriques

1) Définition et théorème fondamental

A anneau commutatif unitaire, $X, X_1, \dots, X_n$ des indéterminées. | k désignera un corps quelconque

Déf 1. Pour $\sigma \in S_n$ et $P \in A[X_1, \dots, X_n]$, $P^\sigma = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$

$A[X_1, \dots, X_n]_S = \{P \in A[X_1, \dots, X_n] \mid \forall \sigma \in S_n,\ P^\sigma = P\}$, anneau des polynômes symétriques sur A

Déf 2 $\prod_{i=1}^{n}(X - X_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} s_{n-i}(X_1, \dots, X_n) X^i$

Les $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont appelés polynômes symétriques élémentaires (on a bien sûr qu'ils sont invariants sous S_n)

De plus, s_i est homogène de degré i.

Déf 3 On définit le poids du monôme $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ par : $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n$.

Le poids d'un polynôme est le maximum des poids de ses monômes.

Théorème 4

$$\left(\begin{array}{ccc} A[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\sim} & A[X_1, \dots, X_n]_S \\ P & \longmapsto & P(s_1, \dots, s_n) \end{array}\right)$$

De plus, l'antécédent d'un polynôme de $d^\circ\, d$ est de poids $\leq d$.

Application 5 Théorème de Kronecker

$L/\mathbb{Q}$ corps de nombres. Si $x \in \mathbb{Q}$ est tq $\forall \sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$, $|\sigma(x)| \leq 1$, alors x est une racine de l'unité.

Déf 6. On appelle sommes de Newton les sommes : $p_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} X_i^k \in A[X_1, \dots, X_n]_S$

Proposition 7 (Identités de Newton)

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k s_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} s_{k-i}(X_1, \dots, X_n) p_i(X_1, \dots, X_n)$

Rmq 8 Si $\operatorname{car}(A) = 0$, on peut exprimer les s_i comme des polynômes en p_i : $A[X_1, \dots, X_n]_S = A[s_1, \dots, s_n] = A[p_1, \dots, p_n]$

Application 9 Soient $f, g \in k[X]$ tq $f \circ g = g \circ f$ avec $\deg f = \deg g = 0\,[2]$. Alors $f = g$.

2) Exemples d'utilisation

2.1 Discriminant

Déf 10 On note $\delta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i<j} (X_i - X_j)^2$, appelé discriminant. D'après le th. 4, il existe $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tq $\delta = Q(s_1, \dots, s_n)$

Rmq 11 : le Q est à "coefficients universels".

Proposition 12

$\delta(X_1, X_2) = s_1^2 - 4s_2$

$\delta(X_1, X_2, X_3) = s_1^2 s_2^2 + 18 s_1 s_2 s_3 - 27 s_3^2 - 4 s_2^3 - 4 s_1^3 s_3$

Déf 13 k corps. $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in k[X]$. On appelle discriminant de P, noté $disc(P)$, la quantité

$$disc(P) = a_n^{2n-2} Q\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right)$$

Exemple 14 $P = aX^2 + bX + c$: $disc(P) = b^2 - 4ac$

$P = X^3 + aX + b$: $disc(P) = -27b^2 - 4a^3$.

2.2 Résultant

Déf 15 $X=(X_0,\dots,X_n)$, $Y=(Y_0,\dots,Y_m)$

$$R(X,Y) = \begin{array}{l} m\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_n & & \\ & X_0 & X_1 & \cdots & X_n & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & X_0 & X_1 & \cdots & X_n \\ Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_m & & \\ & Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_m & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_m \end{vmatrix}}_{\det}$$

Déf 16 A anneau commutatif unitaire.

Soient $\left\{\begin{array}{l} P(X) = x_0 Z^n + x_1 Z^{n-1} + \dots + x_n \\ Q(X) = y_0 Z^m + y_1 Z^{m-1} + \dots + y_m \end{array}\right. \in A[X]$

Soit $\lambda_{P,Q} : \left(\begin{array}{l} \mathbb{Z}[X,Y] \longrightarrow A, \quad n \in \mathbb{Z} \longmapsto n\cdot 1_A \\ \qquad\qquad\qquad\qquad X_i \longmapsto x_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Y_i \longmapsto y_i \end{array} \right)$

morphisme d'anneaux. On note :
$$\mathrm{Res}(P,Q) = \lambda_{P,Q}(\mathrm{Res}(X,Y)).$$

Proposition 17

Si $P_X = X_0 Z^n + X_1 Z^{n-1} + \dots + X_n$ et $P_Y = Y_0 Z^m + \dots + Y_m$, il existe $\varphi_{X,Y}, \psi_{X,Y} \in \mathbb{Z}[X,Y][Z]$ tq :
$$\varphi_{X,Y} P_X + \psi_{X,Y} P_Y = R(X,Y).$$

Corollaire 18

$P, Q \in k[X]$, L_k corps de découp. de P et Q.
Si P et Q ont une racine commune ds L, $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$

Rmq : si on ne veut pas parler de corps de décomp., supposer que P, Q sont décomposés dans k ; par ex. k alg clos ($k = \mathbb{C}$).

Proposition 19

Soit $P(Z) = X_0(Z-X_1)\dots(Z-X_n)$, $Q(Z) = Y_0(Z-Y_1)\dots(Z-Y_m)$ $\in k(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)[Z]$

Ici, $\lambda_{P,Q} : \left(\begin{array}{l} n \longmapsto n \\ X_i \longmapsto (-1)^i X_0 S_i(X_1,\dots,X_n) \\ Y_i \longmapsto (-1)^i Y_0 S_i(Y_1,\dots,Y_m) \end{array} \right)$, et alors :

$$\mathrm{Res}(P,Q) = X_0^m Y_0^n \prod_{i,j} (X_i - Y_j)$$

Corollaire 20

$P, Q \in k[X]$ L_k corps de décomposition de P et Q.
P et Q ont une racine commune dans $L \iff \mathrm{Res}(P,Q) = 0$.

Corollaire 21

Si $P(Z) = a_0 Z^n + \dots + a_n = a_0 \prod_{i=1}^n (Z - t_i) \in k[Z]$:
$$\mathrm{Res}(P,P') = a_0 \times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{Disc}(P)$$

3 Polynômes symétriques et inégalités.

Déf 22. $(\alpha) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ **majore** $(\alpha') = (\alpha'_1,\dots,\alpha'_n) \in \mathbb{R}^n$, noté $(\alpha') \preccurlyeq (\alpha)$ ssi on peut réarranger les élts de (α) et (α') de sorte que :
(i) $\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
(ii) $\alpha'_1 \geq \dots \geq \alpha'_n$ et $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$
(iii) $\forall k$ si $k \leq n$ $\alpha'_1 + \dots + \alpha'_k \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

. On note $T[\alpha] : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, $(a_1,\dots,a_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots a_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$
somme parfois notée $\sum ! \, a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$.

Exemple 23 : $S_k(a_1,\dots,a_n) = \dfrac{1}{k!(n-k)!} T[\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}},0,\dots,0](a_1,\dots,a_n)$

PPT 1

<u>Théorème 24</u> (Inégalité de Schur)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, $T[\alpha+2\beta, 0, 0] + T[\alpha, \beta, \beta] \geq 2T[\alpha+\beta, \beta, 0]$

<u>Théorème 25</u> (Inégalité de Muirhead)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse comparer $T[\alpha]$ et $T[\alpha']$ est que $(\alpha) \succ (\alpha')$ ou $(\alpha') \succ (\alpha)$. Et si $(\alpha) \succ (\alpha')$:

$$T[\alpha] \leq T[\alpha'].$$

avec égalité ssi $(\alpha) = (\alpha')$.

<u>Exemple 26</u> : a) $(1, 0, \dots, 0) \succ (1/n, \dots, 1/n)$: on retrouve l'inégalité arithm-géom.

b) (IMO 2005) $x, y, z \geq 0$ tq $xyz \geq 1$

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0.$$

<u>Théorème 26</u> (Inégalités de Newton/MacLaurin)

Si m_k désigne $\left[\frac{1}{\binom{n}{k}} \times \sigma_k\right]$ moyenne des polynômes symétriques :

$$m_{k-1} m_{k+1} \leq m_k^2 \quad \text{(Newton)}$$

$$m_1 \geq m_2^{1/2} \geq \dots \geq m_n^{1/n}$$

II Localisation de racines.

<u>Théorème 27</u> $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

1) Estimations

<u>Proposition 28</u> $P = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]$, $a_0 \neq 0$.

Alors $\mathrm{Rac}(P) \subset \mathcal{B}\left(0, 1 + \max\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}, \dots, \frac{|a_n|}{|a_0|}\right)\right)$.

<u>Proposition 29</u> Soit $f(x) = x^n - b_1 x^{n-1} - \dots - b_n$ où les $b_i \geq 0$ non tous nuls.

Alors f a une unique racine simple réelle ρ et toutes les autres racines (complexes) sont de module $\leq |\rho|$.

. Si de plus $\mathrm{pgcd}(i \mid b_i > 0) = 1$, alors les racines complexes sont de module $< |\rho|$.

<u>Exemple 30</u> : $x^{2n} - x^n - 1$ a n racines qui ont même module que la racine réelle.

2) Localisation

<u>Proposition 31</u> (Gauss-Lucas) Les racines de $P' \in \mathbb{C}[z]$ se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P.

<u>Proposition 32</u> (Sturm) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$. On définit la <u>suite de Sturm</u> de f par : $f_0 = f$ / $f_1 = f'$ / $f_2 = -$(reste de la div. de f par f') / … / $f_i = -$(reste de la div. de f_{i-2} par f_{i-1}) / … / $f_n = \mathrm{pgcd}(f, f')$.

Si $\omega(x)$ = nbre de changement de signe dans la suite :

$$S_f(x) = (f(x), f'(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

alors $\#\{$racines $\neq$ réelles$\}$ de f entre a et b, où $f(a)f(b) \neq 0$ est égal à $\omega(a) - \omega(b)$.

<u>Proposition 33</u> (Sylvester) Soit $f(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_t)^{m_t} \in \mathbb{R}[X]$; $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $m_1 + \dots + m_t = n$ ($= \deg f$). Si $p_i = \sum_{k=1}^{t} m_k \alpha_k^i$, et :

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & & & \\ p_{n-1} & \cdots & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R}) \text{ de signature } (p, q)$$

alors 1) $\#\{$racines réelles $\neq$ de $f\} = p - q$ et 2) $\#\{$racines $\neq$ de $f\} = p + q$.

3) Séparation

<u>Déf 34</u>. $f(z) = a_m z^m + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$: $\|f\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{m} |a_i|^2\right)^{1/2}$ et $M(f) = |a_m| \prod_{i=1}^{m} \max(1, |z_i|)$
$= a_m \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)$

<u>Lemme 35</u> $M(f) \leq \|f\|_2$ (Landau)

<u>Proposition 36</u> $P \in \mathbb{C}[z]$ de d° n à rac. simples. Si δ = minimum de la distance entre les racines

$$\delta \geq \sqrt{\frac{|\mathrm{disc}(P)|}{n^{n+2}}}\, M(P)^{1-n}$$

PPT 2