

Leçon 205 : Espaces complets

Exemples et applications

Références : El Hage Hassan, Li, Rudin, Berthelon
(DEV 1)

I - Espaces complets et suites de Cauchy

- 1) Suites de Cauchy
- 2) Espaces complets

II - Espaces de Banach

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Les espaces L^p
- 3) Espaces de Hilbert

III - Applications de la complétude

- 1) Théorème du point fixe
- 2) Théorème de prolongement
- 3) Le Théorème de Baire et ses conséquences

DEV 1 : Théorème de Riesz-Fischer

DEV 2 : Projection sur un convexe fermé

Leçon 205: Espaces Complets. Exemples et applications

Soit (X, d) un espace métrique

I - Espaces complets et suite de Cauchy

1) Suites de Cauchy [HAS]

DEF 1: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy lorsque:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

PROP 2: Toute suite convergente est de Cauchy.

• Toute suite de Cauchy dans X est bornée.

• Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

PROP 3: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy.

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède une sous-suite convergente. Autrement dit, une suite de Cauchy dans (X, d) possède une valeur d'adhérence est convergente. La valeur d'adhérence est alors unique: c'est la limite de la suite.
- Pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \varepsilon_k$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.

PROP 4: Soit (Y, d') un espace métrique et $f: X \rightarrow Y$ uniformément continue. L'image d'une suite de Cauchy par f est une suite de Cauchy dans Y .

REM 5: L'hypothèse d'uniforme continuité n'est pas superflue: Soit $X =]0, \infty[$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f: X \rightarrow X$ est un homéomorphisme. Soit $(x_n) = (\frac{1}{n})$, (x_n) est de Cauchy mais $f(x_n)$ ne l'est pas.

2) Espaces complets [HAS]

DEF 6: On dit que (X, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

• Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit complet lorsque A muni de la distance induite est un espace métrique complet.

REM 7: L'importance des espaces métriques complets réside dans le fait que pour démontrer qu'une suite est convergente dans un tel espace, il n'est pas nécessaire de connaître d'avance la valeur de la limite.

EX 8: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

$\mathbb{R}$ et $] -1; 1[$ sont homéomorphes via $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ mais $] -1; 1[$ n'est pas complet (car pas fermé).

PROP 9: Soient (X, d) , (Y, d') deux espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Si f est uniformément continue et (Y, d') complet, alors (X, d) est complet.

COR 10: Soient X un ensemble, d et d' des distances uniformément équivalentes sur X . Alors:

- Toute suite de Cauchy pour d est de Cauchy pour d' et réciproquement.
- (X, d) et (X, d') sont simultanément complets ou non complets.

PROP 11: Si A est complet, alors A est fermé dans X .

• Si A est dense dans X et $A \neq X$, alors A n'est pas complet.

• Si (X, d) est complet et A est fermé dans X , alors A est complet.

EX 12: $([0, 1], |\cdot|)$ est complet.

COR 13: Si $A \subset X$ est compact, alors A est complet.

PROP 14: Soient $(X_i, d_i)_{i \in [1; p]}$ une famille finie d'espaces métriques. Alors $X = \prod_{i=1}^p X_i$ est complet si et seulement si pour tout $i \in [1; p]$, (X_i, d_i) est complet.

EX 15: $\forall p \geq 1$, $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{R}^p$ sont complets.

THM 16: (Cantor) Soit (X, d) un espace métrique. L'ASSE:

- (X, d) est complet
- L'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (X, d) telle que $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ contient un et seul point.

REM 17: L'hypothèse sur le diamètre n'est pas superflue. En effet, $\mathbb{R}$ est complet, $F_n = [n, \infty[$, (F_n) est suite décroissante de fermés non vides dont l'intersection est vide.

II - Espaces de Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définitions et premières propriétés [Li]

DEF 18: On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach lorsque (E, d) est complet où $d: (x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|$.

EX 19: $(K^n, \|\cdot\|_p)$ est complet pour $1 \leq p \leq \infty$.

- Les espaces C_0 et ℓ_p , pour $1 \leq p \leq \infty$ sont complets.
- Si K est un compact, $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
- $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

PROP 20: Si E est de dimension finie, alors E est complet.

PROP 21: Soit $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (F normé). L'application

$T \in \mathcal{L}_c(E, F) \mapsto \|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Si F est complet pour $\|\cdot\|_F$, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ aussi pour $\|\cdot\|$.

REM 22: En particulier, le dual de $E: E^* = \mathcal{L}_c(E, K)$ est toujours complet.

THM 23: $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E . [Li]

2) Les espaces L^p Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré

DEF 24: On définit l'ensemble

$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$
et $\forall f \in L^p, \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

REM 25: $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p. donc $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur L^p .

PROP 26: (Hölder), Soient $1 < p < \infty, q > 1$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p, g \in L^q$. Alors $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

THM 27 (Minkowski): Soit $1 \leq p < \infty$, pour $f \in L^p, g \in L^p$:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Donc L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur L^p .

DEF 28: On définit pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = L^p(X, \mathcal{F}, \mu) / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence d'égalité presque partout. C'est un espace vectoriel.

DEF 29: On définit de même.

$L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable essentiellement bornée}\}$

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > M\}) = 0\} \text{ pour } f \in L^\infty$$

$$L^1(X, \mathcal{F}, \mu) = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)'.$$

DEV 1

THM 30: (Riesz-Fischer) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est complet pour $\|\cdot\|_p$.

3) Espaces de Hilbert [Li] $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

DEF 31: Soit H un K -espace vectoriel. Si on le munit d'un produit scalaire, H est appelé espace préhilbertien. Si H est complet pour la norme associée au produit scalaire, alors H est un espace de Hilbert.

EX 32: Tout espace euclidien est un espace de Hilbert.

• $(L^2(\mu), \|\cdot\|_2)$ est un Hilbert pour le produit scalaire: $\langle f, g \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t)$

• $\ell^2(K)$ est un espace de Hilbert pour sa norme: $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$.

• L'espace des matrices muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(B^* A)$ est un Hilbert.

• $(C([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ n'est pas Hilbert.

THM 33: Soit H un espace de Hilbert et $C \subset H$ convexe fermée non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que:

$$\|x - y\| = d(x, C) = \inf \{ \|x - z\| \mid z \in C \}$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par:

$$y = P_C(x) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

PROP 34: L'application $P_C: H \rightarrow C$ est continue, plus précisément, on a pour tous $x_1, x_2 \in H$,

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|, \text{ i.e. } P_C \text{ est 1-Lipschitzienne.}$$

EX 35: Si H est un $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert et B la boule unité fermée de H , alors la projection de H sur B est $P: x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$.

III - Applications de la complétude

Soit (X, d) un espace métrique complet.

1) Théorème du point fixe (HAS)

THM 36: (point fixe de Banach) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application telle que:

$$\forall k < 1, \forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y). \text{ Alors:}$$

- f possède un unique point fixe $z \in X$
- $\forall x \in X, z = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ et $d(z, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

REM 37: Si $k \geq 1$, alors le théorème précédent n'est plus vrai: si $X = \mathbb{N}$, d distance euclidienne, (X, d) est complet. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $f: X \rightarrow X$ défini par $f(n) = f(m) = k|n - m|$ et f n'a aucun point fixe.

Si (X, d) est non complet, aussi: $X =]0, 1[$, $f: X \rightarrow X$ est contractante mais n'a aucun point fixe.

Si $f: X \rightarrow X$ est contractante, alors $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors la réciproque est fautive:

$X =]0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ n'a aucun point fixe.

APPLI 38: Soient $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0, \alpha_0 > 0$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Soit $f: I \times \mathbb{B}(y_0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable uniformément en $t \in I$.

$$\text{Soit } \phi: y \in \mathbb{B}(y_0, \alpha_0) \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

On suppose que $\phi(y) \in \mathbb{B}(y_0, \alpha_0)$ pour tout $y \in \mathbb{B}(y_0, \alpha_0)$. Alors, il existe une unique solution globale $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

2) Théorème de prolongement

THM 39: Soient $(X, d), (Y, d')$ des espaces métriques, (Y, d') complet, $A \subset X$ dense et $f: A \rightarrow Y$ uniformément continue. Alors f se prolonge de manière unique en une application continue $g: X \rightarrow Y$ uniformément continue.

REM 40: $X =]0, 1[$, $A =]0, 1[$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. A est dense dans X mais f ne se prolonge pas en une application continue sur X .

3) Le théorème de Baire et ses applications

THM 41: (Baire) Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

THM 42: Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense.

THM 43: (Banach-Steinhaus) Soient E un espace de Banach, F un e.v.m et $T_i: E \rightarrow F$ des opérateurs continus tels que $\forall x \in E, \sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i x\| < \infty$, alors, $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\| < \infty$.

COR 44: Soient E un espace de Banach, F un e.v.m et $T_n: E \rightarrow F$ une suite d'opérateurs continus telles que $\forall x \in E, T_n(x) \rightarrow T(x)$. Alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. $T: E \rightarrow F$ est linéaire continue.

THM 45 (Application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ linéaire continue surjective. Alors, il existe $C > 0$ tel que $T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, C)$.

THM 46: Soient E et F deux Banach et $T: E \rightarrow F$ linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est continue.

COR 47: (Lévy-Schur) Soient E un e.v.m muni de deux normes qui le rendent complets. Si elles sont comparables, alors elles sont équivalentes.

COR 48: (Théorème fermé) Soient E, F deux Banach et $T: E \rightarrow F$ est continue $\Leftrightarrow \{y, T(x) \mid x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.