

Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications

Ouvrages: Bourmaza - Marco ; Hassan ; Queffelec Topologie ; Berthelon
(L3 Analyse) El Hage
Tauvel (Ana Comp-) ; Rembaldi

I - Espaces connexes

- 1) Définitions et exemples
- 2) Propriétés de stabilité de la connexité
- 3) Le cas des connexes de $\mathbb{R}$.

II - Raffinements de la notion de connexité

- 1) Composantes connexes
- 2) Connexité par arcs

III - Exemples d'applications

- 1) Calcul différentiel et équations différentielles
- 2) Analyse complexe
- 3) Groupe linéaire

DEV 1: Théorème de Runge

DEV 2: Groupe linéaire : connexité, Composantes connexes

Leçon 204: Connexité. Exemples d'application

Soit (E, d) un espace métrique.

I - Espaces connexes

1) Définitions et exemples [LB Analyse Bourbaki] [POW]

PROP 1: Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (1) Si $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1, O_2 deux ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
- (2) Si $E = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 deux fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
- (3) Les seuls ouverts-fermés de E sont $\emptyset$ et E .
- (4) Toute fonction continue $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

DEF 2: Lorsque (E, d) vérifie l'une des 4 assertions précédentes, on dit (E, d) est un espace métrique connexe.

REM 3: Les espaces connexes sont ceux qui peuvent être considérés comme "étant en un seul morceau".

EX 4: Si $a \in \mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ est connexe, $\mathbb{R}$ est connexe (lemme du passage des douanes). Soit $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ connexes de E , tel que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap E \setminus A \neq \emptyset$. Alors $B \cap A \neq \emptyset$.

EX 5: L'intersection de deux connexes n'est pas forcément connexe, de même pour l'union.

2) Propriétés de stabilité de la connexité [BA2]

PROP 6: Soit $A \subseteq E$ connexe. Alors toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe. Autrement dit, si E contient une partie connexe dense, alors E est connexe.

PROP 7: Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E , telle que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

PROP 8: Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E . On suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

THM 9: Soient E, F deux espaces métriques avec E connexe.

Si $f: E \rightarrow F$ est une application continue, alors $f(E)$ est connexe.

THM 10: Un espace métrique homéomorphe à un espace métrique connexe est connexe.

PROP 11: Soit (E_i, d_i) une famille d'espaces métriques. Le produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ est connexe si et seulement si chaque E_i est connexe.

3) Le cas des connexes de $\mathbb{R}$ [HAS]

THM 12: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

THM 13 (des valeurs intermédiaires): Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle. Si α et β sont dans $f(I)$, alors $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Autrement dit, $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

PROP 14: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) f est ouverte, (2) f est injective, (3) f est strictement monotone.

COR 15: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $J = f(I)$. Alors f est un homéomorphisme de I sur J si et seulement si f est continue et strictement monotone.

II - Raffinements de la notion de connexité

1) Composantes connexes [BA2] [QUR] [HAS]

DEF 16: Deux points x et y de E sont connectés, et on note $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent à une même partie connexe de E .

PROP 17: La relation précédente est une relation d'équivalence.

DEF 18: Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont appelées composantes connexes de E .

PROP 19: La composante connexe d'un point x de E est la plus grande partie connexe de E contenant x .

EX 20: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a deux composantes connexes: $C_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $C_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

PROP 21: Les composantes connexes de E sont fermées.

PROP 22: Si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ où les O_i sont ouverts connexes non vides, alors les O_i sont les composantes connexes de E .

PROP 23: Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

2) Connexité par arcs [BOU] (QUE)

DEF 24: On appelle arc à valeurs dans E toute application continue de $[0,1]$ dans E .

EX 25: Les courbes paramétrées sont connexes, de même pour les surfaces paramétrées.

DEF 26: Un espace topologique E est connexe par arcs lorsque pour tout couple de points (x,y) de E , il existe un arc γ de $[0,1]$ dans E tel que $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$. On dit alors que γ joint les points x et y .

PROP 27: Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

COR 28: L'espace $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ ($n \neq m$)

EX 29: Un cercle de $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

EX 30: Un espace connexe n'est pas forcément connexe par arcs, voir le graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ en ANNEXE.

THM 31: Soit $\mathcal{O}$ un ouvert d'un espace vectoriel normé. Alors $\mathcal{O}$ est connexe, $\mathcal{O}$ est connexe par arcs.

III - Exemples d'applications

(BR) 1) Calcul différentiel et équations différentielles

DEF 32: Soit $f: E \rightarrow F$ avec F un espace métrique. On dit que f est localement constante lorsque tout point $a \in E$ possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$.

PROP 33: Si E est connexe et $f: E \rightarrow F$ localement constante. Alors f est constante.

PROP 34: Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert connexe. Soit $f: U \rightarrow F$ différentiable telle que pour tout $a \in U$, $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors, f est constante sur U .

THM 35: (Cauchy-Lipschitz local). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ait une unique solution γ sur $[t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$.

THM 36: (Unité locale/globale) Sous les hypothèses du théorème précédent, si u et v sont deux solutions de $y' = f(t, y)$ définies sur un intervalle I telles que $\exists t_0 \in I, u(t_0) = v(t_0)$. Alors, $\forall t \in I, u(t) = v(t)$.

THM 37: (de Cauchy-Lipschitz): Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une unique solution maximale $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec I ouvert.

2) Analyse complexe [TAU]

DEF 38: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avec $0 \notin \Omega$. Une détermination continue du logarithme sur Ω est une application continue $L: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \Omega, e^{L(z)} = z$.

PROP 39: Soient L_1, L_2 deux logarithmes continus sur Ω avec $0 \notin \Omega$. Alors: $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall z \in \Omega, L_1(z) = L_2(z) + 2\pi i m$.

THM 40: On suppose Ω connexe et $0 \notin \Omega$. Alors:

- (1) Toute détermination continue du logarithme est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω .
- (2) Si $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur Ω , il existe des déterminations continues du logarithme sur Ω .

DEF 41: Soit $\gamma: [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé c-à-d une application continue et γ par morceaux telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. On définit l'indice de a par rapport à γ par:

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt$$

THM 42: L'application $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma) \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

THM 43: ^(à revoir) On suppose Ω connexe et $f \in H(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors $Z(f) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ est discret: $\forall a \in Z(f), \exists r > 0, D(a, r) \cap Z(f) = \{a\}$.

COR 44: (Principe du prolongement analytique) On suppose Ω connexe. Soient f, g holomorphes sur Ω telles que f est égale à g sur un ensemble possédant au moins un point d'accumulation. Alors, f est égale à g sur Ω .

THM 45: (Principe du maximum) On suppose Ω connexe et borné. Soit $f \in H(\Omega)$. Si $g: z \mapsto |f(z)|$ admet un maximum sur Ω , alors f est constante.

COR 46: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur Ω , avec Ω connexe borné. Alors: $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial \Omega} |f(z)|$.

EX 47: Soit $\omega:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et $H = L^2(]a, b[, \omega)$. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\int_a^b e^{\alpha t} \omega(t) dt < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2(]a, b[, \omega)$.

THM 48 (Runge): Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe, et $a \in \mathbb{C} \setminus K$. Alors $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme de polynômes sur K .

+ une application?

3) Groupe linéaire $[RAT]$ $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ DEV 2

THM 49: Toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit

$A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$, où $P_1, \dots, P_r$ et $Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$, $D_n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{1,1}$ (matrice de dilatation)

COR 50: Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

COR 51: Les ensembles $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et ce sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ (donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe).

ANNEXE : $E = \{(x, \sin(\frac{\pi}{2}x)), x \in]0; 1]\} \cup \mathbb{R} \times [-1, 1]$

