Leçon 171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en oeuvre sur une forme quadratique simple ; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.
La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$. La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 171 intitulée : "Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications." L'objectif de cette leçon sera de donner les grands résultats sur les formes quadratiques réelles sur un espace vectoriel de dimension finie et de donner quelques applications à d'autres sujets et d'étudier les coniques dans le plan affine euclidien.
On commence par une première partie où l'on traite des généralités sur les formes quadratiques. On s'intéresse tout d'abord aux formes bilinéaires et quadratiques en commençant par donne la définition d'une forme bilinéaire ainsi qu'un exemple avant de faire le lien avec sa matrice. On continue en donnant quelques propriétés et définition sur la matrice d'une forme bilinéaire avant de passer à la définition d'une forme quadratique ainsi que de la forme polaire associée. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse aux notions d'orthogonalité, de noyau et de rang. On commence ainsi par définir la notion de vecteurs orthogonaux ainsi que de cône isotrope et de noyau d'une forme bilinéaire. On donne ensuite quelques résultats en définitions qui en découlent et on termine cette sous-partie avec la notion de rang ainsi qu'un résultat sur la dimension de F et de son orthogonal. Dans une troisième sous-partie on s'intéresse à la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ en introduisant tout d'abord le théorème de réduction de Gauss et la notion de base q-orthogonale. On donne ensuite la notion de signature qui est notre invariant sur $\mathbb{R}$ et qui permet de classifier des formes quadratiques réelles via la loi d'inertie de Sylvester.
Dans une deuxième partie on donne quelques premières applications des formes quadratiques réelles. On commence par une application à la recherche d'extrema en calcul différentiel. En effet, la recherche d'extrema peut se faire à l'aide de la matrice hessienne évaluée en un point critique (qui est la matrice d'une forme quadratique réelle par le théorème de Schwarz). On donne ensuite une autre application avec les décompositions de matrices où l'on donne la décomposition LU et de Cholesky que l'on démontre via le critère de Sylvester ainsi que leurs utilisations.
Finalement, on s'intéresse dans une dernière partie aux coniques dans le plan affine euclidien. On commence par une première partie où l'on donne la définition algébrique et les propriétés propriétés de ces coniques. On définit ainsi les notions de conique, conique propre et de conique à centre (notions que l'on réutilisera juste après pour classifier une conique et trouver ses éléments caractéristiques). Dans une deuxième sous-partie on donne la classification des coniques avec tout d'abord la classification euclidienne avec un exemple puis ensuite la classification affine. Finalement, on termine cette leçon avec une dernière sous-partie consacrée à la définition géométrique des coniques propres. On parle tout d'abord de foyer et de directrice ainsi que d'excentricité (notion très utilisées en astronomie dans les trajectoires des planètes ou des fusées) avant de finir par une propriété bifocale des coniques à centre qui exprime le fait que l'on peut décrire une ellipse ou une hyperbole rien qu'à l'aide de deux foyers.
On trouvera finalement en annexe une illustration de la notion de foyer, directrice et d'excentricité dans différents cas.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E.

I Généralités sur les formes quadratiques réelles

I.1 Formes bilinéaires et quadratiques

Définition 1 : Forme bilinéaire [Rombaldi, p.461] :
On dit qu'une application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ est une **forme bilinéaire** lorsque pour tout $x \in E$ (resp. $y \in E$) l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ (resp. $x \longmapsto \varphi(x, y)$) est linéaire.

Remarque 2 : [Rombaldi, p.461]
∗ Une forme bilinéaire est dite **symétrique** (resp. antisymétrique) lorsque pour tous $x, y \in E$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (resp. $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$).
∗ Une application symétrique (resp. antisymétrique) φ de E^2 dans $\mathbb{K}$ est bilinéaire si, et seulement si, l'une deux applications précédente est linéaire.

Exemple 3 : [Rombaldi, p.461]
Pour tout couple (ℓ_1, ℓ_2) de formes linéaires sur E, l'application définie par $(x, y) \longmapsto \ell_1(x)\ell_2(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on considère φ une forme bilinéaire définie sur E^2.

Définition 4 : Matrice d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.462] :
On appelle **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$.

Théorème 5 : [Rombaldi, p.462]
Soit A la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de φ.
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $\varphi(x, y) = X^\intercal AY$.

Remarque 6 : [Rombaldi, p.462]
Ainsi, l'expression d'une forme bilinéaire Ψ dans une base $\mathcal{B}$ est donnée par $\varphi(x, y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_i, e_j)x_i y_i$.

Théorème 7 : [Rombaldi, p.462]
Une application Ψ est une forme bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et des formes linéaires $\ell_1, ..., \ell_n$ linéairement indépendantes sur E^* telles que pour tous $x, y \in E$ on ait l'égalité $\varphi(x, y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\ell_i(x)\ell_j(y)$.

Remarque 8 : [Rombaldi, p.463]
$*$ L'application qui, à une forme bilinéaire $\Psi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, associe sa matrice dans une base donnée de E est un isomorphisme et donc la dimension des formes bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$ est égale à n^2.
$*$ On retrouve alors la dimension des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) de $E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$.

Théorème 9 : [Rombaldi, p.463]
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
Si A_1 et A_2 sont respectivement les matrices de φ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors on a $A_2 = P^\intercal A_1 P$.

Définition 10 : Discriminant d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.463] :
On appelle **discriminant dans la base $\mathcal{B}$ de φ** le déterminant de la matrice de φ dans cette base et on le note $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)$.

Définition 11 : Forme quadratique [Rombaldi, p.464] :
On appelle **forme quadratique sur E** une application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x,x)$.

Théorème 12 : [Rombaldi, p.464]
Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique Ψ telle que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \Psi(x,x)$.

Définition 13 : Forme polaire d'une forme quadratique [Rombaldi, p.464] :
Avec les notations du théorème précédent, on dit que Ψ est la **forme polaire de la forme quadratique** q.

I.2 Orthogonalité, noyau et rang

Dans toute cette sous-partie, on considère q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire associée.

Définition 14 : Vecteurs orthogonaux [Rombaldi, p.465] :
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux relativement à** φ lorsque $\varphi(x,y) = 0$.

On note $X^\perp = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in X,\ \varphi(x,y) = 0\}$ l'orthogonal de X relativement à φ.

Proposition 15 : [Rombaldi, p.466]
Soient X, Y deux parties non vides de E.
$*$ $\{0_E\}^\perp = E$. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
$*$ $X \subseteq \left(X^\perp\right)^\perp$ et $X \subseteq Y$ entraîne $Y^\perp \subseteq X^\perp$.

Définition 16 : Cône isotrope [Rombaldi, p.466] :
On appelle **cône isotrope de** φ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que l'on ait $q(x) = \varphi(x,x) = 0$ et on le note C_φ.

Définition 17 : Noyau d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.466] :
On appelle **noyau de** φ l'orthogonal de E.

Autrement dit, on a :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0\}$$

Ce noyau est un sous-espace vectoriel de E et on dit aussi que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le noyau de la forme quadratique q.

Lemme 18 : [Rombaldi, p.466]
Le noyau de φ est contenu dans le cône isotrope de φ.

Remarque 19 : [Rombaldi, p.467]
Pour calculer le noyau de φ en dimension finie, on peut résoudre le système $AX = 0$.

Définition 20 : Forme bilinéaire sym. non dégénérée [Rombaldi, p.467] :
On dit que φ est une **forme bilinéaire symétrique non dégénérée** lorsque son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

En dimension finie, une forme bilinéaire symétrie est non dégénérée si, et seulement si, sa matrice dans une base quelconque de E est inversible (ce qui est équivalent à dire que son discriminant dans une base quelconque est non nul).

Remarque 21 : [Rombaldi, p.467]
La restriction de q à un sous-espace vectoriel F de E est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Définition 22 : Forme quadratique définie [Rombaldi, p.467] :
On dit que q est une **forme quadratique définie** lorsque pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$ on a $q(x) \neq 0$.

Une forme quadratique q est donc définie si son cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$, ce qui implique qu'elle est non dégénérée puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C_\varphi$.

Définition 23 : Rang d'une application bilinéaire [Rombaldi, p.467] :
On appelle **rang de** φ (ou de q) l'entier $\mathrm{rg}(q) = n - \dim(\mathrm{Ker}(q))$.

Remarque 24 : [Rombaldi, p.467]
En dimension finie, le rang d'une forme quadratique est égal à celui de sa matrice dans une base quelconque. Ainsi, q est non dégénérée si, et seulement si, son rang vaut n.

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 25 : [Rombaldi, p.468]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\dim(F)+\dim\left(F^{\perp}\right)\geq\dim(E)$ avec égalité lorsque q est non dégénérée.
$*$ On a $E=F\oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, $q|_F$ est non dégénérée.

I.3 Signature et réduction

Théorème 26 : Théorème de réduction de Gauss (1) [Rombaldi, p.469] :
Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $r\in[\![1;n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que pour tout $x\in E$ on ait $q(x)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\ell_j^2(x)$.

Exemple 27 : [Rombaldi, p.485]
$*$ On considère $q(x)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$.
On a $q(x)=-(x_1-x_2-x_3))^2+(x_2+x_3)^2-(x_2-x_3)^2$.
$*$ On considère $q(x)=x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+x_2x_3+4x_2x_4+2x_3x_4$.
On a $q(x)=\frac{1}{4}(x_1+x_2+3x_3+6x_4)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2-x_3+2x_4)^2-2(x_3+2x_4)$.

On peut réécrire le théorème de réduction de Gauss matriciellement comme suit :

Théorème 28 : Théorème de réduction de Gauss (2) [Rombaldi, p.473]
Avec les notations du théorème précédent, il existe une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (si r est le rang de q, alors les r premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).

Définition 29 : Base q-orthogonale [Rombaldi, p.473] :
Une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ comme dans le théorème précédent est appelée **base q-orthogonale**.

Définition 30 : Forme quadratique définie positive [Rombaldi, p.475] :
Une forme quadratique réelle q sur E est dite **définie positive** lorsque pour tout $x\in E\backslash\{0_E\}$, $q(x)>0$.

Lemme 31 : Inégalité de Cauchy-Schwarz [Rombaldi, p.475] :
Si q est une forme quadratique positive, alors on a :

$$\forall x,y\in E,\ |\varphi(x,y)|\leq\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$$

Lemme 32 : [Rombaldi, p.475]
Si q est une forme quadratique positive, alors $q^{-1}(\{0\})=\mathrm{Ker}(q)$ (autrement dit, le noyau de q est égal à son cône isotrope).

Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]

Théorème 33 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que, pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on ait $s=\mathrm{Card}(\{i\in[\![1;n]\!]\text{ tq }q(e_i)>0\})$ et $t=\mathrm{Card}(\{i\in[\![1;n]\!]\text{ tq }q(e_i)<0\})$.
De plus, on a la relation $s+t=\mathrm{rg}(q)$.

Théorème 34 : [Rombaldi, p.477]
Si l'on définit les ensembles suivants $\mathcal{P}=\{F\text{ s.e.v. tq }q|_F\text{ définie positive}\}$ et $\mathcal{N}=\{F\text{ s.e.v. tq }q|_F\text{ définie négative}\}$, alors la signature (s,t) de q est donnée par :

$$s=\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }\mathcal{P}=\emptyset\\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}}\dim(F)\text{ sinon}\end{array}\right.\quad\text{et }t=\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }\mathcal{N}=\emptyset\\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}}\dim(F)\text{ sinon}\end{array}\right.$$

Théorème 35 : Loi d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), on a alors la décomposition $q=\sum_{j=1}^{s}\ell_j^2-\sum_{j=s+1}^{s+t}\ell_j^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes dans E^* et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D=\mathrm{diag}(I_s,-I_t,0_{n-s-t})$.

II Quelques applications

II.1 Application à la recherche d'extrema

Dans toute cette sous-partie, on considère F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert non vide de E, $f:U\longrightarrow F$ ainsi qu'un point $a\in U$.

Définition 36 : Application k fois différentiable [Gourdon, p.326]
On suppose que f est différentiable sur U.
$*$ On dit que f est **deux fois différentiable** en a lorsque $df:E\longrightarrow\mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en a. Dans ce cas, on note $d^2f_a=d(df)_a$.
$*$ Par récurrence, on dit que f est k **fois différentiable** en a ($k\in\mathbb{N}^*$) lorsque df est $k-1$ fois différentiable en a et on note $d^kf_a=d\left(d^{k-1}f\right)_a$.

Théorème 37 : Théorème de Schwarz [Gourdon, p.326] :
Si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

$$\forall i,j\in[\![1;n]\!],\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

On suppose jusqu'à la fin de cette sous-partie que $F = \mathbb{R}$.

Définition 38 : Matrice hessienne en un point [Gourdon, p.336] :
On suppose que f est deux fois différentiable en a.
On appelle **matrice hessienne de** f **en** a la matrice définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 39 :
Par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Proposition 40 : [Gourdon, p.335]
Si f admet un extremum relatif en a et est différentiable en a, alors $df_a = 0$.

Remarque 41 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais il ne s'agit pas d'un extremum relatif.

Définition 42 : Point critique [Gourdon, p.336] :
On dit que a est un **point critique de** f lorsque f est différentiable en a et que $df_a = 0$.

Théorème 43 : [Gourdon, p.336]
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :
$*$ Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative).
$*$ Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Exemple 44 : [Gourdon, p.337]
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ admet un point col en $(0,0)$ et deux minimums absolus en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

II.2 Décompositions de matrices

Théorème 45 : Décomposition LU [Rombaldi, p.690] :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors A admet une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls.
De plus, cette décomposition est unique lorsqu'elle existe.

Remarque 46 :
Cette décomposition est surtout utilisée pour résoudre les systèmes linéaire du type $AX = b$ en résolvant à la place les systèmes triangulaires $Ux = y$ et $Ly = b$.

Développement 3 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 47 : Critère de Sylvester [Rombaldi, p.478] :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
A est définie positive si, et seulement si, tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Théorème 48 : Décomposition de Cholesky [Rombaldi, p.691] :
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^\intercal$.

Remarque 49 :
La décomposition de Cholesky est surtout utilisée dans la résolution de systèmes linéaires du type $Ax = b$ avec A une matrice réelle symétrique définie positive ou bien pour simuler un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ avec $\Gamma = A^\intercal A$ à partir d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$.

III Coniques dans le plan affine euclidien

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{E}$ le plan affine réel.

III.1 Définition algébrique et premières propriétés

Définition 50 : Conique [Audin, p.223] :
On appelle **conique** toute courbe $\mathcal{C}$ dont l'équation cartésienne dans un repère affine R est algébrique de degré 2 à coefficients réels, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \text{ avec } (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

Le polynôme f ci-dessus peut également s'écrire sous la forme :

$$f(M) = q\left(\overrightarrow{OM}\right) + L_O\left(\overrightarrow{OM}\right) + c_O$$

où O est l'origine du repère, et où, q, L_O et c_O sont respectivement une forme quadratique sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, une forme linéaire sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et un scalaire et correspondent respectivement aux termes d'ordre 2,1 et 0 de l'équation.

Remarque 51 : [Audin, p.223]
Le polynôme f est du seconde degré, c'est-à-dire sa partie quadratique q n'est pas nulle.

Définition 52 : Conique propre [Audin, p.223] :
On dit que la conique définie par le polynôme f est une **conique propre** lorsque la forme quadratique définie sur $E \times \mathbb{K}$ par $Q(u,z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$ est non dégénérée (cette forme quadratique est appelée **homogénéisée de** q).

Remarque 53 : [Audin, p.223]
Changer de point O revient à remplacer $Q(u,z)$ par $Q'(u,z) = Q\left(u + z\overrightarrow{OO'}, z\right)$.

Exemple 54 : [Audin, p.224]
$*$ Pour $f(x,y) = xy$, la forme quadratique homogénéisée est $Q = xy$ (dégénérée).
$*$ Pour $f(x,y) = x^2+y^2-1$, la forme quadratique homogénéisée est $Q = x^2+y^2-z^2$ (non dégénérée).

Définition 55 : Conique à centre [Audin, 227] :
On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ est un **centre pour la conique** et on dit alors que la conique est une **conique à centre**.

Remarque 56 : [Audin, p.227]
Quand il y a un centre, il est unique.

Théorème 57 : [Audin, p.227]
$*$ On obtient les centres éventuels d'une conique $\mathcal{C}$ en annulant les dérivées partielles de f.
$*$ Pour que $\mathcal{C}$ soit une conique à centre, il faut et il suffit que la forme quadratique q soit non dégénérée.

Remarque 58 : [Audin, p.227]
Si q est dégénérée, il peut n'y avoir aucun centre (ça sera le cas des paraboles) ou une droite affine de centres (cas de deux droites parallèles).

III.2 Classification des coniques

L'origine étant choisie, on cherche à présent un repère adéquat dans lequel l'équation de la conique est réduite.

III.2.1 Classification euclidienne

On suppose dans toute ce paragraphe que $\mathcal{E}$ est euclidien.

Théorème 59 : [Audin, p.228]
Dans un certain repère orthonormé, l'équation d'une conique euclidienne est de l'une des neuf formes suivantes (a, b, k, p sont des réels non nuls) :
$*$ Type elliptique :
- Ellipse réelle : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. - Ellipse imaginaire : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.
- Ellipse dégénérée en un point : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

$*$ Type hyperbolique :
- Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. - Hyperbole dégénérée en deux droites : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

$*$ Type parabolique :
- Parabole : $y^2 = 2px$.
- Parabole dégénérée en deux droites parallèles réelles : $y^2 = k^2$.
- Parabole dégénérée en une droite réelle double : $y^2 = 0$.
- Parabole dégénérée en deux droites imaginaires parallèles : $y^2 = -k^2$.

Remarque 60 : [Audin, p.229 + 230 + 231]
$*$ Une ellipse est compacte alors qu'une hyperbole a des branches infinies. Les asymptotes d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont les deux droites sécantes définies par l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.
$*$ Une ellipse est connexe et le complémentaire d'un point dans une ellipse est encore connexe.
$*$ Une hyperbole est dite **équilatère** lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

Exemple 61 :
La conique d'équation $-3x^2 - 3y^2 - 10xy + 8x - 8y + 8 = 0$ est de type hyperbolique.

III.2.2 Classification affine

Théorème 62 : [Audin, p.232]
Dans un repère adéquat, l'équation d'une conique du plan affine réel est de l'une des neufs formes suivantes :
$*$ Type elliptique :
- Ellipse réelle : $X^2+Y^2=1$. - Ellipse imaginaire : $X^2+Y^2=-1$.
- Ellipse dégénérée en un point : $X^2+Y^2=0$.
$*$ Type hyperbolique :
- Hyperbole : $X^2-Y^2=1$. - Hyperbole dégénérée en deux droites : $X^2-Y^2=0$.
$*$ Type parabolique :
- Parabole : $Y^2=X$.
- Parabole dégénérée en deux droites parallèles réelles : $Y^2=1$.
- Parabole dégénérée en une droite réelle double : $Y^2=0$.
- Parabole dégénérée en deux droites imaginaires parallèles : $Y^2=-1$.

Corollaire 63 : [Audin, p.232]
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux conique propres d'images non vides.
Pour qu'il existe une transformation affine envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aient le même type.

Remarque 64 : [Audin, p.232]
Le type de la conique décrit son type topologique. En d'autres termes, on peut remplacer "transformation affine" par "homéomorphisme" dans l'énoncé précédent : les ellipses sont les coniques compactes, les paraboles sont les coniques connexes mais pas compactes et les hyperboles sont les coniques ni connexes ni compactes.

III.3 Définitions géométriques des coniques propres

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\mathcal{E}$ est euclidien.

III.3.1 Description par foyer et directrice

Proposition 65 : [Audin, p.232]
Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé **foyer**, une droite D ne contenant par F appelée **directrice** et un nombre réel positif e appelé **excentricité** tels que la conique soit l'ensemble des points M tels que $FM=ed(M,D)$.
Inversement, étant données F,D et e, l'ensemble des points M du plan tels que $FM=ed(M,D)$ est une conique propre (une ellipse si $e<1$, une parabole si $e=1$ et une hyperbole si $e>1$).

Remarque 66 : [Audin, p.233]
Par symétrie, les coniques propres à centre qui ne sont pas des cercles ont deux foyers (situés sur le grand axe dans le cas elliptique) et deux directrices parallèles.

III.3.2 Propriété bifocale des coniques à centre

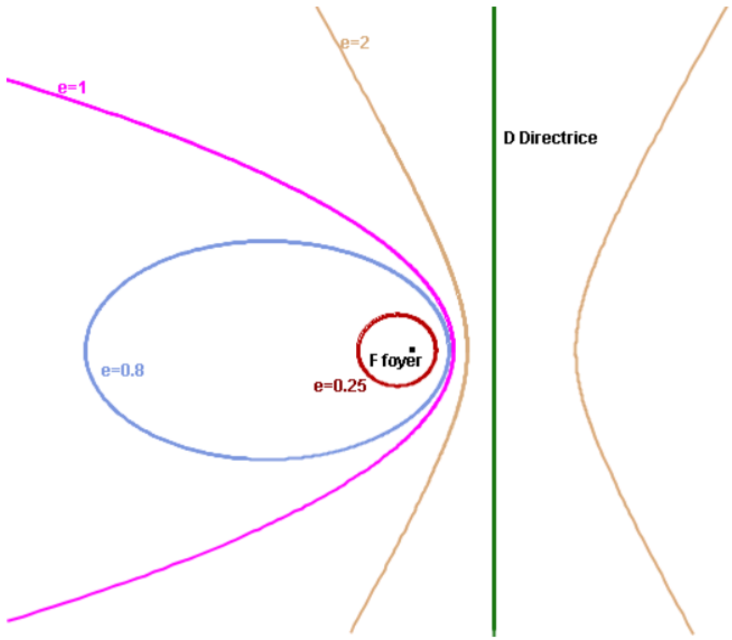
On peut aussi décrire les ellipses et hyperboles rien qu'à l'aide de deux foyers.

Proposition 67 : [Audin, p.233]
$*$ Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$ pour un certain réel positif a tel que $2a>FF'$.
$*$ Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF-MF'|=2a$ pour un certain réel positif a tel que $2a<FF'$.

Remarque 68 : [Audin, p.235]
Cette définition de l'ellipse donne un moyen de la dessiner avec un crayon et une ficelle dont les extrémités sont fixées aux deux foyers.

IV Annexe

IV.1 Illustration du foyer, de la directrice et de l'excentricité



Remarques sur le plan

- On peut s'intéresser d'avantage aux coniques en donnant plus d'illustrations et quelques exemples.
- Il faut savoir classifier des formes quadratiques et des coniques.

Liste des développements possibles

- Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$.
- Décomposition LU et décomposition de Cholesky.

Bibliographie

- Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- Michèle Audin, *Géométrie*.