Leçon 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Extrait du rapport de jury

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en oeuvre sur une forme quadratique simple. En ajout de la classification sur $\mathbb{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p,q) notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $\mathrm{O}(p,q)$.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 170 intitulée : "Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications." L'objectif de cette leçon sera de donner les grands résultats sur les formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie et de donner quelques applications à d'autres sujets.
On commence par une première partie où l'on traite des généralités sur les formes quadratiques. On s'intéresse tout d'abord aux formes bilinéaires et quadratiques en commençant par donne la définition d'une forme bilinéaire ainsi qu'un exemple avant de faire le lien avec sa matrice. On continue en donnant quelques propriétés et définition sur la matrice d'une forme bilinéaire avant de passer à la définition d'une forme quadratique ainsi que de la forme polaire associée. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse aux notions d'orthogonalité, de noyau et de rang. On commence ainsi par définir la notion de vecteurs orthogonaux ainsi que de cône isotrope et de noyau d'une forme bilinéaire. On donne ensuite quelques résultats en définitions qui en découlent et on termine cette sous-partie avec la notion de rang ainsi qu'un résultat sur la dimension de F et de son orthogonal.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à la classification des formes quadratiques grâce à plusieurs invariants qui dépendent de notre corps de base. On commence par le cas de $\mathbb{C}$ en énonçant le théorème de réduction de Gauss ainsi que la notion de base q-orthogonale. Tout ceci nous permet de classifier une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ uniquement grâce au rang. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse à la classification sur $\mathbb{R}$ en introduisant la notion de signature qui est notre nouvel invariant sur $\mathbb{R}$ et qui aboutit à la classification des formes quadratiques réelles via la loi d'inertie de Sylvester. Finalement, on s'intéresse à la classification des formes quadratiques sur un corps fini en utilisant la notion de discriminant qui devient notre nouvel invariant de classification dans le cas présent.
Enfin, on termine cette leçon avec quelques applications. On commence par s'intéresser à la géométrie dans (E,q) en introduisant la notion d'isométrie relativement à φ puis l'on s'intéresse à certaines isométries particulières avec les symétries orthogonales ainsi que les réflexions et renversements. En effet, ces isométries particulières sont en fait des générateurs de (q) et $\mathrm{SO}(q)$. On continue par une deuxième sous-partie avec les décompositions de matrices où l'on donne la décomposition LU et de Cholesky que l'on démontre via le critère de Sylvester. Finalement, on termine par quelques résultats d'optimisation avec la recherche d'extrema qui peut se faire en dimension finie via des résultats qui lui sont propres avec l'utilisation de la matrice hessienne.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de E.

I Généralités sur les formes quadratiques

I.1 Formes bilinéaires et quadratiques

Définition 1 : Forme bilinéaire [Rombaldi, p.461] :
On dit qu'une application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ est une **forme bilinéaire** lorsque pour tout $x \in E$ (resp. $y \in E$) l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ (resp. $x \longmapsto \varphi(x, y)$) est linéaire.

Remarque 2 : [Rombaldi, p.461]
$*$ Une forme bilinéaire est dite **symétrique** (resp. antisymétrique) lorsque pour tous $x, y \in E$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (resp. $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$).
$*$ Une application symétrique (resp. antisymétrique) φ de E^2 dans $\mathbb{K}$ est bilinéaire si, et seulement si, l'une deux applications précédente est linéaire.

Exemple 3 : [Rombaldi, p.461]
Pour tout couple (ℓ_1, ℓ_2) de formes linéaires sur E, l'application définie par $(x, y) \longmapsto \ell_1(x)\ell_2(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on considère φ une forme bilinéaire définie sur E^2.

Définition 4 : Matrice d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.462] :
On appelle **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 5 : [Rombaldi, p.462]
Soit A la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de φ.
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a $\varphi(x, y) = X^\intercal AY$.

Remarque 6 : [Rombaldi, p.462]
Ainsi, l'expression d'une forme bilinéaire Ψ dans une base $\mathcal{B}$ est donnée par $\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_i$.

Théorème 7 : [Rombaldi, p.462]
Une application Ψ est une forme bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et des formes linéaires $\ell_1, ..., \ell_n$ linéairement indépendantes telles dans E^* telles que pour tous $x, y \in E$ on ait l'égalité $\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \ell_i(x) \ell_j(y)$.

Remarque 8 : [Rombaldi, p.463]
$*$ L'application qui, à une forme bilinéaire $\Psi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, associe sa matrice dans une base donnée de E est un isomorphisme et donc la dimension des formes bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$ est égale à n^2.
$*$ On retrouve alors la dimension des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) de $E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$.

Théorème 9 : [Rombaldi, p.463]
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
Si A_1 et A_2 sont respectivement les matrices de φ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors on a $A_2 = P^\intercal A_1 P$.

Définition 10 : Discriminant d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.463] :
On appelle **discriminant dans la base $\mathcal{B}$ de φ** le déterminant de la matrice de φ dans cette base et on le note $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)$.

Définition 11 : Forme quadratique [Rombaldi, p.464] :
On appelle **forme quadratique sur E** une application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$.

Théorème 12 : [Rombaldi, p.464]
Si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique Ψ telle que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \Psi(x, x)$.

Définition 13 : Forme polaire d'une forme quadratique [Rombaldi, p.464] :
Avec les notations du théorème précédent, on dit que Ψ est la **forme polaire de la forme quadratique** q.

I.2 Orthogonalité, noyau et rang

Dans toute cette sous-partie, on considère q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire associée.

Définition 14 : Vecteurs orthogonaux [Rombaldi, p.465] :
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux relativement à** φ lorsque $\varphi(x, y) = 0$.

On note $X^\perp = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in X,\ \varphi(x, y) = 0\}$ l'orthogonal de X relativement à φ.

Proposition 15 : [Rombaldi, p.466]
Soient X, Y deux parties non vides de E.
$*$ $\{0_E\}^\perp = E$. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
$*$ $X \subseteq \left(X^\perp\right)^\perp$ et $X \subseteq Y$ entraîne $Y^\perp \subseteq X^\perp$.

Définition 16 : Cône isotrope [Rombaldi, p.466] :
On appelle **cône isotrope de** φ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que l'on ait $q(x) = \varphi(x, x) = 0$ et on le note C_φ.

Définition 17 : Noyau d'une forme bilinéaire [Rombaldi, p.466] :
On appelle **noyau de** φ l'orthogonal de E.

Autrement dit, on a :
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$
Ce noyau est un sous-espace vectoriel de E et on dit aussi que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le noyau de la forme quadratique q.

Lemme 18 : [Rombaldi, p.466]
Le noyau de φ est contenu dans le cône isotrope de φ.

Remarque 19 : [Rombaldi, p.467]
Pour calculer le noyau de φ en dimension finie, on peut résoudre le système $AX = 0$.

Définition 20 : Forme bilinéaire sym. non dégénérée [Rombaldi, p.467] :
On dit que φ est une **forme bilinéaire symétrique non dégénérée** lorsque son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

En dimension finie, une forme bilinéaire symétrie est non dégénérée si, et seulement si, sa matrice dans une base quelconque de E est inversible (ce qui est équivalent à dire que son discriminant dans une base quelconque est non nul).

Remarque 21 : [Rombaldi, p.467]
La restriction de q à un sous-espace vectoriel F de E est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Définition 22 : Forme quadratique définie [Rombaldi, p.467] :
On dit que q est une **forme quadratique définie** lorsque pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$ on a $q(x) \neq 0$.

Une forme quadratique q est donc définie si son cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$, ce qui implique qu'elle est non dégénérée puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C_\varphi$.

Définition 23 : Rang d'une application bilinéaire [Rombaldi, p.467] :
On appelle **rang de** φ (ou de q) l'entier $\mathrm{rg}(q) = n - \dim(\mathrm{Ker}(q))$.

Remarque 24 : [Rombaldi, p.467]
En dimension finie, le rang d'une forme quadratique est égal à celui de sa matrice dans une base quelconque. Ainsi, q est non dégénérée si, et seulement si, son rang vaut n.

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 25 : [Rombaldi, p.468]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E)$ avec égalité lorsque q est non dégénérée.
$*$ On a $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, $q|_F$ est non dégénérée.

II Classification des formes quadratiques

II.1 Classification sur $\mathbb{C}$

Théorème 26 : Théorème de réduction de Gauss (1) [Rombaldi, p.469] :
Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $r \in [\![1;n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \ell_j^2(x)$.

Exemple 27 : [Rombaldi, p.485]
$*$ On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.
On a $q(x) = -(x_1 - x_2 - x_3))^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$.
$*$ On considère $q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$.
On a $q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)$.

On peut réécrire le théorème de réduction de Gauss matriciellement comme suit :

Théorème 28 : Théorème de réduction de Gauss (2) [Rombaldi, p.473]
Avec les notations du théorème précédent, il existe une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (si r est le rang de q, alors les r premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).

Définition 29 : Base q-orthogonale [Rombaldi, p.473] :
Une base $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ comme dans le théorème précédent est appelée **base q-orthogonale**.

Remarque 30 : [Rombaldi, p.473]
Comme une matrice symétrique définit une unique forme quadratique dans la base canonique de $E \cong \mathbb{K}^n$, on en déduit que si A est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe alors une matrice inversible P telle que la matrice $P^{\intercal}AP$ soit diagonale.

Théorème 31 : [Rombaldi, p.474]
Avec les notations précédentes, on a $\operatorname{rg}(q) = r$ et :

$$\operatorname{Ker}(q) = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;r]\!],\ \ell_i(x) = 0\}$$

II.2 Classification sur $\mathbb{R}$

Définition 32 : Forme quadratique définie positive [Rombaldi, p.475] :
Une forme quadratique réelle q sur E est dite **définie positive** lorsque pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$, $q(x) > 0$.

Lemme 33 : Inégalité de Cauchy-Schwarz [Rombaldi, p.475] :
Si q est une forme quadratique positive, alors on a :

$$\forall x, y \in E,\ |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$$

Lemme 34 : [Rombaldi, p.475]
Si q est une forme quadratique positive, alors $q^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker}(q)$ (autrement dit, le noyau de q est égal à son cône isotrope).

Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]

Théorème 35 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que, pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on ait $s = \operatorname{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) > 0\})$ et $t = \operatorname{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\})$.
De plus, on a la relation $s + t = \operatorname{rg}(q)$.

Théorème 36 : [Rombaldi, p.477]
Si l'on définit les ensembles suivants $\mathcal{P} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie positive}\}$ et $\mathcal{N} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie négative}\}$, alors la signature (s,t) de q est donnée par :

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 37 : Loi d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), on a alors la décomposition $q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes dans E^* et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \operatorname{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-s-t})$.

II.3 Classification sur les corps finis

Dans toute cette sous-partie, on considère p un nombre premier impair et φ une forme quadratique non nulle sur le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel E.

Théorème 38 : [Rombaldi, p.480]
Si $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ est un non carré fixé et que φ est de rang $r \in [\![1;n]\!]$, alors il existe une base de E dans la quelle matrice de φ est de la forme $D = \mathrm{diag}(I_{r-1}, \delta, 0_{n-r})$ avec $\delta \in \{1;\alpha\}$.

Corollaire 39 : [Rombaldi, p.482]
$*$ Deux formes quadratiques non dégénérées q et q' sur E sont équivalentes si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, le rapport $\frac{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q')}{\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}(q)}$ est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$.
$*$ Il y a dans l'espace vectoriel $Q(E)$ des formes quadratiques sur E, $2n+1$ classes d'équivalence, dont deux de formes quadratiques non dégénérées.

III Applications

III.1 Géométrie dans (E, q)

Dans toute cette sous-partie, on considère φ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée.

Définition 40 : Isométrie de E relativement à φ [Perrin, p.123] :
On appelle **isométrie de E relativement à φ** tout automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$ on ait $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$. On note alors $O(q)$ le **groupe orthogonal**.

Proposition 41 : [Perrin, p.124]
Un élément $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une isométrie si, et seulement si, elle conserve la norme quadratique q attachée à φ (autrement dit, pour tout $x \in E$, $q(u(x)) = \varphi(u(x), u(x)) = q(x) = \varphi(x, x)$.

Proposition 42 : [Perrin, p.124]
Pour tout $u \in O(q)$, on a $\det(u) \in \{-1; 1\}$.

Définition 43 : Groupe spécial orthogonal [Perrin, p.124] :
On appelle **groupe spécial orthogonal** le sous-groupe de $O(q)$ formé des isométries de déterminant 1 et on le note $\mathrm{SO}(q)$ ou $O^+(q)$.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on se place dans la cas euclidien (c'est-à-dire q définie positive).

Définition 44 : Symétrie orthogonale [Perrin, p.125] :
On considère F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F l'application s_F définie par $x \longmapsto p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$ (où p_F est la projection orthogonale sur F).

Remarque 45 :
Les symétries sont des isométries et elles vérifient $s_F^2 = \mathrm{Id}_E$.

Définition 46 : Réflexion/renversement [Perrin, p.125] :
On considère F un sous-espace vectoriel de E.
Lorsque $\dim(F) = n-1$, on dit que s_F est une **réflexion** et lorsque $\dim(F) = n-2$ on parle de **renversement**.

Proposition 47 : [Perrin, p.141]
On a $O(q) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO(q) \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 48 : Théorème de Cartan-Dieudonné [Perrin, p.143] :
$O(q)$ est engendré par les réflexions.
Plus précisément, tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

Lemme 49 : [Perrin, p.143]
Le produit de deux réflexions est produit de renversement.

Théorème 50 : [Perrin, p.143]
Pour $n \geq 3$, $\mathrm{SO}(q)$ est engendré par les renversements.
Plus précisément, tout élément de $\mathrm{SO}(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Remarque 51 : [Perrin, p.143]
Le théorème ci-dessus se généralise dans le cas où q n'est pas définie positive mais il faut distinguer plusieurs cas à cause d'une possible isotropie.

III.2 Décompositions de matrices

Théorème 52 : Décomposition LU [Rombaldi, p.690] :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors A admet une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls.
De plus, cette décomposition est unique lorsqu'elle existe.

Remarque 53 :
Cette décomposition est surtout utilisée pour résoudre les systèmes linéaire du type $AX = b$ en résolvant à la place les systèmes triangulaires $Ux = y$ et $Ly = b$.

Développement 3 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 54 : Critère de Sylvester [Rombaldi, p.478] :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
A est définie positive si, et seulement si, tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Théorème 55 : Décomposition de Cholesky [Rombaldi, p.691] :
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^\intercal$.

Remarque 56 :
La décomposition de Cholesky est surtout utilisée dans la résolution de systèmes linéaires du type $Ax = b$ avec A une matrice réelle symétrique définie positive ou bien pour simuler un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ avec $\Gamma = A^\intercal A$ à partir d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$.

III.3 Extrema de fonctions

Dans toute cette sous-partie, on considère F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert non vide de E, $f : U \longrightarrow F$ ainsi qu'un point $a \in U$.

Définition 57 : Application k fois différentiable [Gourdon, p.326]
On suppose que f est différentiable sur U.
$*$ On dit que f est **deux fois différentiable** en a lorsque $df : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en a. Dans ce cas, on note $d^2 f_a = d(df)_a$.
$*$ Par récurrence, on dit que f est k **fois différentiable** en a ($k \in \mathbb{N}^*$) lorsque df est $k-1$ fois différentiable en a et on note $d^k f_a = d\left(d^{k-1} f\right)_a$.

Théorème 58 : Théorème de Schwarz [Gourdon, p.326] :
Si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

On suppose jusqu'à la fin de cette sous-partie que $F = \mathbb{R}$.

Définition 59 : Matrice hessienne en un point [Gourdon, p.336] :
On suppose que f est deux fois différentiable en a.
On appelle **matrice hessienne de f en a** la matrice définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 60 :
Par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Proposition 61 : [Gourdon, p.335]
Si f admet un extremum relatif en a et est différentiable en a, alors $df_a = 0$.

Remarque 62 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais il ne s'agit pas d'un extremum relatif.

Définition 63 : Point critique [Gourdon, p.336] :
On dit que a est un **point critique de** f lorsque f est différentiable en a et que $df_a = 0$.

Théorème 64 : [Gourdon, p.336]
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :
$*$ Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative).
$*$ Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Exemple 65 : [Gourdon, p.337]
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ admet un point col en $(0, 0)$ et deux minimums absolus en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Remarques sur le plan

— Attention à la caractéristique 2 qui est un cas particulier pour lequel les résultats sont rapidement faux !

— Il faut savoir faire une décomposition de Gauss pour trouver la signature et la rang (décomposition non unique mais le nombre de carrés oui !).

Liste des développements possibles

— Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$.

— Décomposition LU et décomposition de Cholesky.

Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.