# Leçon 156 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

## Extrait du rapport de jury

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

## Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 156 intitulée : "Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.". Les endomorphismes trigonalisables sont très intéressants à étudier car leur structure permet une simplification des manipulations (le produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure, on a les valeurs propres sur la diagonale, ...). Leur étude nous amène d'abord à regarder le cas des endomorphismes nilpotents et le lien entre les deux arrive avec la décomposition de Dunford.
Dans une première partie, on s'intéresse aux endomorphismes trigonalisables. On commence tout d'abord avec un premier point sur les polynômes d'endomorphisme. On rappelle ainsi la définition d'un idéal et d'un polynôme annulateur. Ceci nous permet de redéfinir le polynôme minimal ainsi que la dimension de $\mathbb{K}[u]$. On enchaîne ensuite avec le lemme des noyaux puis le polynôme caractéristique et son lien avec les valeurs propres. On passe ensuite à un second point où l'on s'intéresse précisément à la trigonalisation. On commence par définir ce qu'est un endomorphisme trigonalisable avant de passer sur un critère de trigonalisation et on termine ce point avec la trigonalisation par passage à un sous-espace stable. On termine par un dernier petit point sur la co-trigonalisabilité en donnant la définition ainsi qu'un critère.
Dans une deuxième sous-partie, on s'intéresse aux endomorphismes nilpotents. On commence tout d'abord par des généralités en introduisant les noyaux itérés puis en énonçant des résultats sur la dimension des noyaux et des images. On passe ensuite à la définition d'un endomorphisme nilpotent puis on parle du cône nilpotent. On introduit ensuite la décomposition de Fitting via le lemme de Fitting qui permet de dénombrer les endomorphismes nilpotents sur un corps fini. On donne ensuite dans un deuxième point des critères de nilpotence, avec tout d'abord un résultat général ainsi que par la trace qui permet de démontrer le théorème de Burnside.
On termine enfin cette leçon avec des applications à la réduction en commençant par la décomposition de Dunford. On donne par conséquent le théorème de décomposition de Dunford qui fait le lien entre les endomorphismes diagonalisables et nilpotents ainsi que quelques applications à la diagonalisabilité, à la détermination des antécédents de l'identité par l'exponentielle et on s'intéresse également à la surjectivité/bijectivité de l'exponentielle matricielle. On conclut cette dernière partie avec un point sur la décomposition de Jordan qui est l'aboutissement de l'étude des endomorphismes nilpotents. On introduit alors les cellules et blocs de Jordan. Cela nous permet d'énoncer le théorème de réduction de Jordan qui est un outil puissant pour montrer que deux endomorphismes sont semblables ou bien pour calculer les puissances ou l'exponentielle d'une matrice.

# Plan



# Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

# I Endomorphismes trigonalisables

## I.1 Polynômes d'endomorphisme

Si l'on considère $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit alors $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

**Définition 1 : Polynôme d'endomorphisme [Berhuy, p.941] :**
On appelle **polynôme d'endomorphisme en** $u$ tout endomorphisme de $E$ de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et on note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

**Lemme 2 : [Berhuy, p.942]**
L'application :

$$\mathrm{ev}_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, pour tout sous-espace $F$ de $E$ stable par $u$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P\left(u|_F\right) = P(u)|_F$$

**Définition 3 : Idéal/polynôme annulateur [Berhuy, p.944 + 945] :**
On appelle **idéal annulateur de** $u$, le noyau du morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\mathrm{ev}_u$ et on le note $\mathrm{Ann}(u)$. De plus, tout élément de $\mathrm{Ann}(u)$ est appelé **polynôme annulateur de** $u$.

**Définition 4 : Polynôme minimal [Berhuy, p.945] :**
Le polynôme $\pi_u$ est appelé **polynôme minimal de** $u$. De plus, c'est l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$(\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0) \iff (\pi_u | P)$$

**Proposition 5 : [Deschamps, p.97]**
Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $\left(u^k\right)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et l'on a $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$.

**Proposition 6 : [Deschamps, p.83]**
Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $\pi_{u|_F}$ divise $\pi_u$.

**Lemme 7 : [Rombaldi, p.608]**
Soient $r$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_r$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} P_j$.
Si les polynômes $P_k$ sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes $Q_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $P_k$ et $Q_k$ sont premiers entre eux.

**Lemme 8 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :**
Soient $r$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

**Définition 9 : Polynôme caractéristique [Berhuy, p.946] :**
On appelle **polynôme caractéristique de** $M$ le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ définit par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

**Exemple 10 : [Deschamps, p.78]**
Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est le polynôme $\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1)$.

**Théorème 11 : [Deschamps, p.78]**
Un scalaire $\lambda$ est une valeur propre de $M$ si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de $M$.

**Théorème 12 : Théorème de Cayley-Hamilton [Deschamps, p.99] :**
Le polynôme caractéristique de $u$ annule $u$, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

**Corollaire 13 : [Rombaldi, p.607]**
On a $\pi_u$ qui divise $\chi_u$.

**Remarque 14 : [Rombaldi, p.608]**
Si on écrit $\chi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et les $\lambda_k$ deux à deux distincts, alors $\pi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

### I.2 Trigonalisation et critère de trigonalisation

**Définition 15 : Endomorphisme trigonalisable [Deschamps, p.92]**
L'endomorphisme $u$ est un **endomorphisme trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure.

**Théorème 16 : [Deschamps, p.93 + 103]**
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ $u$ est trigonalisable. $*$ $u$ possède un polynôme annulateur scindé.
$*$ Le polynôme minimal de $u$ est scindé.

**Corollaire 17 :**
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de $E$ est trigonalisable.

**Exemple 18 :**
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

**Corollaire 19 : [Deschamps, p.93]**
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$.
Si $u$ est trigonalisable, alors l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$ est également trigonalisable.

**Corollaire 20 : [Rombaldi, p.676]**
Si $u$ est trigonalisable, alors la trace de $u$ est égale à la somme des valeurs propres de $u$ et le déterminant de $u$ est égal au produit des valeurs propres de $u$ (comptées avec multiplicité).

**Théorème 21 : [Rombaldi, p.762]**
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'égalité $\det\left(e^M\right) = e^{\mathrm{Tr}(M)} \neq 0$.
En particulier, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det\left(e^M\right) = e^{\mathrm{Tr}(M)} > 0$.

### I.3 Critère de co-trigonalisation

**Définition 22 : Endomorphismes co-trigonalisables [Deschamps, p.104] :**
On considère $v$ et $w$ deux endomorphismes de $E$.
Les endomorphismes $v$ et $w$ sont dits **co-trigonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle les matrices de $v$ et $w$ sont simultanément trigonalisable.

**Théorème 23 : [Deschamps, p.104]**
Soient $v$ et $w$ deux endomorphismes de $E$.
Si $v$ et $w$ commutent, alors $v$ et $w$ sont co-trigonalisables.

## II Endomorphismes nilpotents

### II.1 Noyaux itérés et généralités

**Lemme 24 : [Caldero, p.74]**
Les suites $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante au sens de l'inclusion.
De plus, ces deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

**Lemme 25 : [Caldero, p.74]**
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dim\left(\operatorname{Ker}(u^{k+1})\right) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right) + \dim\left(\operatorname{Im}\left(u^k\right) \cap \operatorname{Ker}(u)\right)$.

**Lemme 26 : [Caldero, p.74]**
La suite $\left(\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

**Définition 27 : Endomorphisme nilpotent [Berhuy, p.966] :**
L'endomorphisme $u$ est appelé **endomorphisme nilpotent** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété est alors appelé **indice de nilpotence** de $u$.

**Exemple 28 : [Beck, p.168]**
La dérivation $P \longmapsto P'$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente mais pas dans $\mathbb{K}[X]$ car il est nécessaire d'utiliser un argument de degré.

**Proposition 29 : [Beck, p.168]**
L'ensemble $\mathcal{N}(E)$ des endomorphismes nilpotents de $E$ est un cône (car stable par multiplication par un scalaire).

**Remarque 30 : [Beck, p.168]**
$\mathcal{N}(E)$ n'est ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$, ni un sous-espace vectoriel. En effet, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais pas la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Proposition 31 : [Beck, p.169]**
Si $n = 2$, alors on a :
* $u \in \mathcal{N}(E)$ si, et seulement si, $\operatorname{Tr}(u) = 0$ et $\det(u) = 0$.
* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $a = -d$ et $ad - bc = 0$.

**Proposition 32 : [Beck, p.168]**
Soient $(v, w) \in \mathcal{N}(E)^2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
* Si $v \circ w = w \circ v$, alors $v + w \in \mathcal{N}(E)$.
* Si $v \circ f = f \circ v$, alors $v \circ f \in \mathcal{N}(E)$.

**Lemme 33 : Lemme de Fitting [Caldero, p.74] :**
Avec les notations du lemme 24, on a $E = \operatorname{Ker}\left(u^{n_0}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(u^{n_0}\right)$.
De plus, $u$ induit un endomorphisme nilpotent sur $\operatorname{Ker}\left(u^{n_0}\right)$ et un automorphisme sur $\operatorname{Im}\left(u^{n_0}\right)$.

**Définition 34 : Décomposition de Fitting [Caldero, p.74] :**
La donnée de $((F, G), v, w)$ où $F = \operatorname{Ker}\left(u^{n_0}\right)$, $G = \operatorname{Im}\left(u^{n_0}\right)$, $v = u|_F$ et $w = u|_G$ avec $E = F \oplus G$, $v$ nilpotent et $w$ un automorphisme est appelée **décomposition de Fitting**.

**Développement 1 : [cf. CALDERO]**

**Théorème 35 : [Caldero, p.74]**
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini commutatif de cardinal $q$, alors il y a $n_d = q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Exemple 36 :**
En appliquant la formule à l'espace vectoriel $E = \mathbb{F}_2^2$ sur le corps $\mathbb{F}_2$, on trouve qu'il y a 4 matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$. Par un calcul direct, on trouve que ce sont les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## II.2 Critères de nilpotence

**Proposition 37 : [Beck, p.168]**
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* L'endomorphisme $u$ est nilpotent. * $\chi_u = X^n$.
* Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_u = X^p$.
* $u$ est trigonalisable avec uniquement des zéros sur sa diagonale.
* $u$ est trigonalisable et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{0\}$.

**Exemple 38 : [Beck, p.169]**
La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_N = X^2$, donc $N$ est nilpotente.
De plus, $\pi_N = X^2$, donc son indice de nilpotence est égal à 2.

**Développement 2 : [cf. FRANCINOU]**

**Lemme 39 : [Francinou, p.353]**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors la matrice $M$ est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\operatorname{Tr}\left(M^k\right) = 0$.

**Théorème 40 : Théorème de Burnside [Francinou, p.353] :**
Soit $H$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle et que $H$ est d'exposant fini, alors il est fini.

# III Applications à la réduction

## III.1 Décomposition de Dunford

**Théorème 41 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]**
Si le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple $(d, n)$ d'endomorphismes de $E$ tel que $d$ est diagonalisable, $n$ est nilpotente, $d$ et $n$ commutent et $u = d + n$.
De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$.

**Corollaire 42 : [Rombaldi, p.766]**
Si le polynôme caractéristique de $M$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors $M$ est diagonalisable si, et seulement si, $e^M$ est diagonalisable.

**Théorème 43 : [Rombaldi, p.779]**
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff (A \text{ diagonalisable et } \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z})$$

**Exemple 44 :**

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3} e^{bN + cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c + \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 45 : [Rombaldi, p.769]**
Pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que l'on ait $e^{Q(M)} = M$ (autrement dit : l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

**Corollaire 46 : [Rombaldi, p.770]**
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

**Théorème 47 : [Rombaldi, p.768]**
L'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le logarithme matriciel.

## III.2 Décomposition de Jordan

**Définition 48 : Cellule de Jordan [Berhuy, p.978] :**
On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle **cellule de Jordan** la matrice :

$$J_{r,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

**Remarque 49 :**
Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la matrice $J_{r,0}$ est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^r$.

**Définition 50 : Bloc de Jordan [Berhuy, p.978]**
On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle **bloc de Jordan** une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{r_1,\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_h,\lambda} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

**Proposition 51 : [Berhuy, p.980]**
Tout endomorphisme nilpotent admet une base de Jordan (c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de $u$ a la même forme qu'à la définition précédente).

**Théorème 52 : Réduction de Jordan [Berhuy, p.983] :**
Si $\chi_u$ est scindé, alors $\pi_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{r_\lambda}$ est aussi scindé et $u$ admet une base de Jordan.
De plus, $u$ admet une forme de Jordan unique une fois choisie une numérotation des valeurs propres.

**Exemple 53 : [Berhuy, p.985]**
La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_M = (X+1)(X-2)^5$ et sa forme de Jordan est :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Corollaire 54 : [Berhuy, p.983]**
Deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés sont semblables si, et seulement si, ils ont la même forme de Jordan.

**Exemple 55 : [Beck, p.173]**
Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes de rang 2 mais ne sont pas semblables.

# Remarques sur la leçon

— On peut s'attarder sur la réduction de Frobenius avec les notions d'invariants de similitude, d'endomorphismes cycliques, de matrices compagnon et du commutant par exemple.

— Il est également possible de discuter de la topologie des endomorphismes trigonalisables.

# Liste des développements possibles

— Dénombrement des endomorphismes nilpotents sur un corps fini.

— Théorème de Burnside.

— Décomposition de Dunford.

# Bibliographie

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Vincent Beck, *Objectif agrégation*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*.