Leçon 154 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, il est attendu de choisir quelques exemples de décompositions de matrices présentée avec quelques applications significatives. Citons les plus classiques : décomposition LU, décomposition de Dunford, décomposition de Frobenius, décomposition de Jordan, décomposition QR, décomposition polaire, décomposition de Cholesky... Il ne s'agit pas d'établir un catalogue complet, mais plutôt de présenter des méthodes et des domaines d'applications variées. Les aspects de constructions effectives ou approchées algorithmiques doivent être abordés. Les relations entre les différentes décompositions proposées, s'il y en a, doivent être connues.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 154 intitulée : "Exemples de décompositions de matrices. Applications.". Les matrices sont omniprésentes en algèbre et notamment dans les cadre de l'algèbre linéaire avec la réduction d'endomorphismes ainsi que la résolution de systèmes linéaires. Pouvoir écrire des matrices sous une certaine forme plutôt que celle donnée peut donc représenter un réel intérêt dans la résolution de beaucoup de problèmes courants. C'est donc en ce sens que va s'orienter cette leçon.
Dans une première partie on s'intéresse à la réduction des endomorphismes où l'idée clé est d'écrire une matrice donné sous une forme particulière via un changement de base. Tout d'abord on donne quelques outils utiles à la réduction avec les lemmes 1 et 2. On continue ensuite avec la diagonalisation et la trigonalisation où l'on cherche à écrire une matrice respectivement sous forme diagonale et triangulaire. On commence ainsi par rappeler la définition d'un endomorphisme et d'une matrice diagonalisable avant de donner des caractérisations très utiles en pratiques de la diagonalisabilité et on termine avec un exemple de matrice diagonalisable ainsi qu'un calcul de puissance de matrice. On termine cette sous-partie en rappelant la définition d'un endomorphisme et d'une matrice trigonalisable ainsi qu'une caractérisation de la trigonalisabilité et un exemple de trigonalisation. On termine cette partie avec un dernier point sur la décomposition de Dunford qui sera très utile pour calculer des puissances ou des exponentielles de matrices. On commence donc par donner le théorème de décomposition de Dunford ainsi que deux corollaires et un théorème autour de l'exponentielle d'une matrice avant de finir par un exemple de calcul d'exponentielle de matrice et une autre décomposition.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux invariants de similitude qui nous permettront de caractériser le fait que deux matrices sont semblables. On commence tout d'abord avec le cas de la décomposition de Jordan en donnant la définition d'une cellule ainsi que d'un bloc de Jordan avant de continuer avec le théorème de réduction de Jordan ainsi qu'un exemple concret avant de finir sur le corollaire 30 qui énonce le résultat principal dont nous parlions il y a un instant. On continue ensuite avec la réduction de Frobenius en commençant par énoncer les définitions et lemmes préliminaires au théorème de décomposition de Frobenius. On donne ensuite des relations faisant intervenir les invariants de similitude ainsi qu'un autre résultat qui caractériser la similitude de deux matrices puis un exemple concret.
Dans une troisième partie on s'intéresse à des décompositions dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On commence avec une première sous-partie consacrée aux générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. On rappelle ainsi la définition d'une matrice de transvection et de dilatation et on montre que celles-ci engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et on termine par un résultat de connexité. Dans une deuxième sous-partie on parle du théorème spectral en commençant par introduire des résultats préliminaires avant d'énoncer le théorème spectral avant de donner en application la décomposition polaire ainsi qu'un homéomorphisme de l'exponentielle matricielle.
Finalement, on s'intéresse aux systèmes linéaires et aux calculs numériques où les décompositions de matrices prennent toute leur importance. On commence par le cas de

la décomposition LU en donnant le théorème de décomposition LU, ses utilisations les plus courantes ainsi qu'un exemple. On passe ensuite à la décomposition de Cholesky (qui peut être vue comme un cas particulier de la décomposition LU) en énonçant le théorème de décomposition de Cholesky ainsi que ses principales utilisations comme par exemple d'autres décompositions. On conclut cette partie avec les méthodes itératives qui permettent d'approcher les solutions de systèmes linéaires lorsque leur résolution ou les décompositions précédentes ne sont pas possibles ou trop longues. On considère alors une suite et on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle converge ainsi que les méthodes itératives les plus classiques.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Réduction d'endomorphismes

I.1 Outils à la réduction

Lemme 1 : [Rombaldi, p.608]

Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} P_j$.

Si les polynômes P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Lemme 2 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :

Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

I.2 Diagonalisation et trigonalisation

Définition 3 : Endomorphisme diagonalisable [Deschamps, p.92]

L'endomorphisme u est un **endomorphisme diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Définition 4 : Matrice diagonalisable [Deschamps, p.86] :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale D. Autrement dit, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Remarque 5 :

La plupart des résultats qui suivent seront énoncés avec A mais restent valables pour u en voyant A comme la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Proposition 6 : [Deschamps, p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ A est diagonalisable. $*$ $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$. $*$ $\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$.
$*$ A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
$*$ π_A est scindé à racines simples.

Corollaire 7 : [Deschamps, p.91]
La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :
$*$ Son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
$*$ Pour toute valeur propre λ de A, on a $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.

Corollaire 8 :
Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Exemple 9 : [Deschamps, p.97]
Les projections et les symétries de E sont diagonalisables. En effet :
$*$ Le polynôme minimal d'un projecteur p de E est :

$$\mu_p = \begin{cases} X & \text{si } p = 0 \\ X - 1 & \text{si } p = \mathrm{Id}_E \\ X^2 - X & \text{sinon} \end{cases}$$

$*$ Le polynôme minimal d'une symétrie s de E est :

$$\mu_s = \begin{cases} X - 1 & \text{si } s = \mathrm{Id}_E \\ X + 1 & \text{si } s = -\mathrm{Id}_E \\ X^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 10 :
Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, alors il existe une matrice diagonale D et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$

Exemple 11 : [Deschamps, p.88]
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 3 \times 2^{n-1} + 2^n\right) & -3\left(1 + 2^n - 2^{n-1}\right) & -2\left(1 + 2^{n-1} - 3 \times 2^{n-1}\right) \\ 2\left(1 - 2^n\right) & -3 + 2^{n+2} & 2\left(2^n - 1\right) \\ 2\left(2^n - 1\right) & -3\left(2^n - 1\right) & -2\left(2^{n-1} - 1\right) \end{pmatrix}$$

Définition 12 : Endomorphisme trigonalisable [Deschamps, p.92]
L'endomorphisme u est un **endomorphisme trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Définition 13 : Matrice trigonalisable [Deschamps, p.92] :
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire T. Autrement dit, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PTP^{-1}$.

Théorème 14 : [Deschamps, p.93 + 103]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ A est trigonalisable. $*$ A possède un polynôme annulateur scindé.
$*$ Le polynôme minimal de A est scindé.

Exemple 15 : [Deschamps, p.95]
La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et semblable à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque 16 :
Lorsque l'on doit résoudre un système d'équations linéaires à coefficients constants, on peut l'écrire sous la forme $X' = MX$ avec M une matrice carrée. Si M est trigonalisable, on peut alors simplifier la résolution de ce système et la ramener à la résolution de $Y' = \widetilde{M}Y$ où $\widetilde{M} = P^{-1}MP$ est une matrice triangulaire supérieure et $Y = P^{-1}X$.

I.3 Décomposition de Dunford

Théorème 17 : Décomposition de Dunford (1) [Rombaldi, p.613] :
Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que d est diagonalisable, n est nilpotente, d et n commutent et $u = d + n$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Corollaire 18 : [Rombaldi, p.766]
Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, e^M est diagonalisable.

Remarque 19 :
En pratique, pour obtenir la décomposition de Dunford de u, on réalise la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ puis on calcule les projecteurs spectraux π_k et on pose alors $d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ (avec $\lambda_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$) et $n = u - d$.

Corollaire 20 : [Rombaldi, p.765]
Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors on notant $D+V$ sa décomposition de Dunford, on a $e^A = e^D e^V = e^D \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} V^k$ et la décomposition de Dunford de e^A est $e^D + e^D\left(e^V - I_n\right)$ avec e^D diagonalisable et $e^D\left(e^V - I_n\right)$ nilpotente.

Théorème 21 : [Rombaldi, p.779]
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff (A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z})$$

Exemple 22 :
Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3} e^{bN+cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c + \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 23 :
La décomposition de Dunford est surtout utilisée pour calculer des puissances ou des exponentielles de matrices.

Proposition 24 : Décomposition de Dunford multiplicative [Rombaldi, p.687] :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple de matrices $(T, D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que T est diagonalisable, D unipotente et $A = TD = DT$.

II Invariants de similitude

II.1 Décomposition de Jordan

Définition 25 : Cellule de Jordan [Berhuy, p.978] :
On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle **cellule de Jordan** la matrice :

$$J_{r,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

Définition 26 : Bloc de Jordan [Berhuy, p.978]
On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle **bloc de Jordan** une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{r_1,\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_h,\lambda} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

Proposition 27 : [Berhuy, p.980]
Tout endomorphisme nilpotent admet une base de Jordan (c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de u a la même forme qu'à la définition précédente).

Théorème 28 : Réduction de Jordan [Berhuy, p.983] :
Si χ_u est scindé, alors $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{r_\lambda}$ est aussi scindé et u admet une base de Jordan.
De plus, u admet une forme de Jordan unique une fois choisie une numérotation des valeurs propres.

Exemple 29 : [Berhuy, p.985]
La matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$$
a pour polynôme caractéristique $\chi_M = (X+1)(X-2)^5$ et sa forme de Jordan est :
$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corollaire 30 : [Berhuy, p.983]
Deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés sont semblables si, et seulement si, ils ont la même forme de Jordan.

Exemple 31 : [Beck, p.173]
Les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont nilpotentes de rang 2 mais ne sont pas semblables.

II.2 Décomposition de Frobenius

Définition 32 : Sous-espace stable engendré par un vecteur [Berhuy, p.1013] :
On considère $v \in E$.
On appelle **sous-espace vectoriel stable engendré par** v le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant v.

Lemme 33 : [Berhuy, p.1014]
Pour tout $v \in E$, on a $E_v = \{P(u)(v) | P \in \mathbb{K}[X]\}$.
De plus une base de E_v est donnée par $\left(v, u(v), ..., u^{d-1}(v)\right)$ (avec d le plus petit entier tel que la famille soit liée). D'autre part, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a l'égalité $P(u|_{E_v}) = 0$ si, et seulement si, $P(u)(v) = 0$.
Et enfin, si $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathbb{K}^n$ vérifient $u^d(v) = -a_0 v - a_1 u(v) - ... - a_{d-1}u^{d-1}(v)$, alors on a $\pi_{u|_{E_v}} = a_0 + a_1 X + ... + a_{d-1}X^{d-1} + X^d$ et donc $\deg\left(\pi_{u|_{E_v}}\right) = \dim(E_v)$.

Proposition 34 : [Berhuy, p.1015]
Il existe un vecteur $v \in E \backslash \{0\}$ tel que $\pi_{u|_{E_v}} = \pi_u$.

Définition 35 : Vecteur u-maximal [Berhuy, p.1016] :
Un vecteur $v \in E \backslash \{0\}$ tel que $\pi_{u|_{E_v}} = \pi_u$ est appelé **vecteur u-maximal**.

Définition 36 : Endomorphisme cyclique [Berhuy, p.1016] :
On dit que u est un **endomorphisme cyclique** lorsqu'il existe $v \in E$ tel que la famille $(v, u(v), ..., u^{n-1}(v))$ soit une base de E. Un tel vecteur v est alors appelé **u-cyclique**.

Proposition 37 : [Berhuy, p.1018]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* L'endomorphisme u est cyclique.
* Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.
* Il existe $v \in E \backslash \{0\}$ tel que $E = E_v$. * On a $\deg(\pi_u) = n$. * On a $\chi_u = \pi_u$.

Lemme 38 : [Berhuy, p.1019]
Soit $v \in E$ un vecteur u-maximal.
Le sous-espace E_v admet un supplémentaire stable par u.

Théorème 39 : Décomposition de Frobenius [Berhuy, p.1021] :
Il existe un entier $r \geq 1$, des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ et des polynômes unitaires non constants $\chi_{u,1}, ..., \chi_{u,r} \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
* $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
* Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, F_i est stable par u et $u|_{F_i}$ est cyclique et de polynômes minimal $\chi_{u,i}$.
* On a $\chi_{u,1} | \chi_{u,2} | ... | \chi_{u,r}$.

Remarque 40 : [Berhuy, p.1021]
Une telle décomposition est appelée décomposition de Frobenius de u et l'entier r ainsi que les polynômes $\chi_{u,1}, ..., \chi_{u,r}$ sont unique et appelés invariants de similitude de u.

Corollaire 41 : [Berhuy, p.1021]
Avec les notations du théorème précédent, on a les relations suivantes : $\chi_{u,r} = \pi_u$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u,i}$.
De plus, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par bloc avec le i-ième bloc correspondant à la matrice compagnon de $\chi_{u,i}$.

Exemple 42 : [Berhuy, p.1034]

Les invariants de similitude de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont $\chi_{M,1} = 1$, $\chi_{M,2} = X - 1$ et $\chi_{M,3} = (X-1)(X+1)$.

Corollaire 43 : [Berhuy, p.1021]

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles ont les mêmes invariants de similitude.

Exemple 44 :

En reprenant l'exemple précédent, on a que la matrice M est semblable à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III Décomposition dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

III.1 Générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$

Définition 45 : Matrice de transvection [Rombaldi, p.147] :

On appelle **matrice de transvection** toute matrice qui peut se mettre sous la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ dans une certaine base avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1; n]\!]$ distincts.

Définition 46 : Matrice de dilatation [Rombaldi, p.147] :

On appelle **matrice de dilatation** toute matrice qui peut se mettre sous la forme $D_{i,j}(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ dans une certaine base avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \in [\![1; n]\!]$.

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 47 : [Rombaldi, p.688]

Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Exemple 48 :

On a $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = T_{1,2}\left(-\frac{1}{2}\right) T_{2,1}(1) T_{2,1}(1) T_{1,2}(1)$.

Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]

Corollaire 49 : [Rombaldi, p.689]

Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Corollaire 50 : [Rombaldi, p.689]

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

III.2 Théorème spectral et application

Proposition 51 : [Deschamps, p.835]

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Proposition 52 : [Deschamps, p.837]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposition 53 : [Deschamps, p.837]

Soient v un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par v, alors $F^\perp$ est aussi stable par v.

Théorème 54 : Théorème spectral [Deschamps, p.837] :

Tout endomorphisme symétrique u de E est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.

Corollaire 55 : [Deschamps, p.838]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
M est symétrique si, et seulement si, il existe une matrice orthogonale P telle que PDP^{-1} soit diagonale.

Théorème 56 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :

Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 57 : [Rombaldi, p.741] :

La multiplication matricielle induit les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Corollaire 58 : [Rombaldi, p.756]

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 59 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

IV Systèmes linéaires et calculs numériques

IV.1 Décomposition LU

Définition 60 : Déterminants principaux [Rombaldi, p.690] :
On appelle **déterminants principaux de** A les déterminants des matrices principales $A_k = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Développement 3 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 61 : Décomposition LU [Rombaldi, p.690] :
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors A admet une décomposition $A = \mathrm{LU}$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls.
De plus, cette décomposition est unique lorsqu'elle existe.

Remarque 62 :
Cette décomposition est surtout utilisée pour résoudre les systèmes linéaire du type $AX = b$ en résolvant à la place les systèmes triangulaires $Ux = y$ et $Ly = b$ ainsi que le calcul de $\det(A)$ et A^{-1}.

Exemple 63 :
La décomposition LU de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV.2 Décomposition de Cholesky

Théorème 64 : Critère de Sylvester [Rombaldi, p.478] :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
A est définie positive si, et seulement si, tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Développement 4 : [B] [cf. ROMBALDI]

Théorème 65 : Décomposition de Cholesky [Rombaldi, p.691] :
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^\top$.

Remarque 66 :
La décomposition de Cholesky est surtout utilisée dans la résolution de systèmes linéaires du type $Ax = b$ avec A une matrice réelle symétrique définie positive ou bien pour simuler un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ avec $\Gamma = A^\intercal A$ à partir d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$.

Théorème 67 : Décomposition QR [Rombaldi, p.692]
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QR$ avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Théorème 68 : Décomposition d'Iwasawa [Rombaldi, p.692] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = QDR$ avec Q une matrice orthogonale, D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

IV.3 Méthodes itératives

Dans toute cette sous-partie, on suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Ces méthodes permettent de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations linéaires du type $Ax = b$ lorsque les matrices sont assez grosses.

Définition 69 : Splitting [Allaire, p.428] :
On appelle **splitting de** A la décomposition $A = M - N$ avec M inversible.

Remarque 70 : [Allaire, p.428]
Le but de ces méthodes est d'approcher x et pour cela on considère $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$.
En cas de convergence vers x, on s'arrête en pratique lorsque la norme $\|Ax_k - b\|$ est assez petite.

Définition 71 : Méthode itérative convergente [Allaire, p.428] :
On dit qu'une méthode itérative est une **méthode convergente** lorsque pour tout vecteur initial x_0, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de (S).

Proposition 72 : [Allaire, p.428]
La méthode de la remarque précédente converge si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 73 : [Allaire, p.428]
Si A est une matrice symétrique réelle définie positive et que (M, N) est son splitting, alors $M^\intercal + N$ est symétrique.
Si de plus $M^\intercal + N$ est définie positive, alors $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Voici quelques méthodes itératives classiques :

Méthodes	Splitting
Jacobi	$M = \mathrm{Diag}(a_{i,i})$ et $N = M - A$
Gauss-Seidel	$A = D - E - F$, $M = D - E$ et $N = F$
Relaxation ($\omega \in]0;2[$)	$M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Remarques sur le plan

— Il faut énoncer les résultats sous forme matricielle autant que possible ! On peut aussi s'intéresser à d'autres types de décomposition comme la décomposition QR par exemple.

— Il est bon de savoir mettre en oeuvre les différents types de décomposition sur des exemples concrets, de connaître les différents liens entre eux ainsi que leurs avantages et inconvénients.

Liste des développements possibles

— Décomposition de Dunford.

— Générateurs de $\mathrm{SL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_n(K)$.

— Décomposition LU et décomposition de Cholesky.

Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Vincent Beck, *Objectif agrégation*.

— Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*.