Leçon 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbb{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 152 intitulée "Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.". Décomposer un espace en somme de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme est plus simple est un objectif très important en algèbre. Le cas idéal est celui où les actions induites sont les homothéties : c'est la diagonalisabilité. Le cas est intéressant à étudier et pas entièrement utopique grâce à la densité des endomorphismes diagonalisables et la décomposition de Dunford.
On commence toute d'abord cette leçon par une première partie qui concerne les définitions essentielles ainsi que les premières propriétés. On parle tout d'abord d'endomorphismes et de matrices diagonalisables dans un premier point en énonçant les définitions ainsi qu'un premier exemple de matrice diagonalisable. Puisque les notions d'endomorphisme et de matrices ne sont que deux points de vue différents d'une même chose en dimension finie, on continuera en énonçant des résultats sur des endomorphismes mais ceux-ci restent bien sûr vrais avec les matrices associées. Dans un deuxième point on introduit le vocabulaire de base concernant les éléments propres qui seront utiles pour la suite, c'est-à-dire de valeur et vecteur propre, de spectre d'un endomorphisme, de sous-espace propre et de sous-espace stable. Dans un troisième point on parle de polynômes annulateurs que l'on introduit grâce au lemme 13 et à la définition 14. Cela nous permet d'en déduire la notion de polynôme minimal qui sera très importante par la suite comme on peut déjà le voir avec la proposition 17. On termine ce point en donnant un exemple de polynôme minimal ainsi que le lemme des noyaux. On conclut cette partie avec la notion de polynôme caractéristique qui jouera également un rôle très important dans la suite de cette leçon. On commence par rappeler ce qu'est le polynôme caractéristique ainsi qu'un premier exemple puis en donnant une caractérisation des valeurs propres par les racines du polynôme caractéristique. On continue ensuite par le théorème de Cayley-Hamilton ainsi que l'exemple des matrices compagnon.
Dans un deuxième point, nous allons parler de la diagonalisation des endomorphismes. Tout d'abord on donne des critères de diagonalisabilité en utilisant les polynômes minimaux et caractéristiques introduits précédemment. On donne deux caractérisations de la diagonalisabilité en proposition 30 et corollaire 31 puis que l'endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable est encore diagonalisable et enfin on donne un exemple de diagonalisation au travers des matrices circulantes. On donne ensuite un critère de co-diagonalisabilité en commençant d'abord par énoncer la définition puis un résultat intermédiaire avant de donner le critère en question. Pour terminer cette partie, on parle dans un dernier point de la topologie des matrices diagonalisables. On montre ainsi que $D_n(\mathbb{K})$ est non borné et connexe par arcs, que son intérieur est $B_n(\mathbb{K})$ et que son adhérence est $T_n(\mathbb{K})$. C'est ce dernier résultat qui donne de l'intérêt aux endomorphismes diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Dans un troisième point, on s'intéresse aux endomorphismes diagonalisables remarquables. On commence par le cas des endomorphismes normaux en rappelant la définition ainsi que deux résultats préliminaires qui nous permettent d'énoncer un

résultat général sur la réduction des endomorphismes normaux et qui se précisera par la suite. On s'intéresse ensuite aux endomorphismes orthogonaux qui sont des cas particuliers d'endomorphismes normaux puisque $u^* = u^{-1}$ et l'on énonce un résultat de réduction qui précise le résultat sur les endomorphismes normaux. Enfin, on termine finalement par les endomorphismes symétriques où l'on énonce quelques résultats préliminaires afin de donner le théorème spectral qui permet de diagonaliser n'importe qu'elle matrice symétrique réelle et on en donne une application avec la décomposition polaire.
On termine cette leçon par des applications de la notion de diagonalisation. Tout d'abord on énonce la décomposition de Dunford qui sera utile dans le calcul de puissances de matrices ou d'exponentielles de matrices. On enchaîne ensuite sur le calcul de puissances de matrices dans le cas d'une matrice diagonalisable avec une proposition ainsi qu'une application. On finit par une dernière application qui est le calcul d'exponentielles de matrices : on justifie tout d'abord que l'exponentielle matricielle est bien définie puis on donne la décomposition de Dunford de l'exponentielle d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'on montre que l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ainsi qu'un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.

I Définitions et premières propriétés

I.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 1 : Endomorphisme diagonalisable [Deschamps, p.92]
L'endomorphisme u est un **endomorphisme diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemple 2 : [Deschamps, p.88]
Les homothéties de rapport $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ sont diagonalisables.

Définition 3 : Matrice diagonalisable [Deschamps, p.86] :
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale D. Autrement dit, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Remarque 4 :
La plupart des résultats qui suivent seront énoncés sur u mais restent valables pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en voyant M comme la matrice d'un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$ de E.

I.2 Éléments propres

Définition 5 : Valeur propre et vecteur propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est une **valeur propre de** u lorsqu'il existe $x \in E\backslash\{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. De plus, un tel vecteur x est alors appelé **vecteur propre associé à la valeur propre** λ.

Remarque 6 : [Deschamps, p.67]
Autrement dit, λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.

Définition 7 : Spectre d'un endomorphisme [Deschamps, p.67] :
On appelle **spectre de** u **sur** $\mathbb{K}$ (noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$) l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme u.

Définition 8 : Sous-espace propre [Deschamps, p.67] :
On considère $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.
On appelle **sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ** le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \{x \in \mathbb{K} \text{ tq } u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

Proposition 9 : [Deschamps, p.69]
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), ..., E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Exemple 10 : [Deschamps, p.68]
Si $E = F \oplus G$, la projection p sur F parallèlement à G admet 0 et 1 comme valeurs propres.

Définition 11 : Sous-espace stable [Deschamps, p.64] :
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** u lorsque $u(F) \subseteq F$.

I.3 Polynômes annulateurs

Si l'on considère $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit alors $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

Définition 12 : Polynôme d'endomorphisme [Berhuy, p.941] :
On appelle **polynôme d'endomorphisme en** u tout endomorphisme de E de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et on note $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Lemme 13 : [Berhuy, p.942]
L'application :

$$\mathrm{ev}_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres associatives unitaires et $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
De plus, pour tout sous-espace F de E stable par u, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P\left(u|_F\right) = P(u)|_F$$

Définition 14 : Idéal/polynôme annulateur [Berhuy, p.944 + 945] :
On appelle **idéal annulateur de** u le noyau du morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres ev_u et on le note $\mathrm{Ann}(u)$. De plus, tout élément de $\mathrm{Ann}(u)$ est appelé **polynôme annulateur de** u.

Proposition 15 : [Berhuy, p.945]
Puisque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{Ann}(u)$ est non nul et il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\mathrm{Ann}(u) = \pi_u \mathbb{K}[X] = \{\pi_u Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Définition 16 : Polynôme minimal [Berhuy, p.945] :
Le polynôme π_u est appelé **polynôme minimal de** u. De plus, c'est l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$(\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0) \iff (\pi_u | P)$$

Proposition 17 : [Deschamps, p.76]
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Exemple 18 : [Deschamps, p.97]
$*$ Le polynôme minimal d'un projecteur p de E est :

$$\mu_p = \begin{cases} X & \text{si } p = 0 \\ X - 1 & \text{si } p = \mathrm{Id}_E \\ X^2 - X & \text{sinon} \end{cases}$$

$*$ Le polynôme minimal d'une symétrie s de E est :

$$\mu_s = \begin{cases} X - 1 & \text{si } s = \mathrm{Id}_E \\ X + 1 & \text{si } s = -\mathrm{Id}_E \\ X^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 19 :
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\pi_{u|_F}$ divise π_u.

Lemme 20 : [Rombaldi, p.608]
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r P_j$.
Si les polynômes P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Lemme 21 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :
Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^r P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

I.4 Polynôme caractéristique

Définition 22 : Polynôme caractéristique [Berhuy, p.946] :
On appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ définit par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Exemple 23 : [Deschamps, p.78]
Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est le polynôme $\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1)$.

Théorème 24 : [Deschamps, p.78]
Un scalaire λ est une valeur propre de M si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de M.

Proposition 25 : [Deschamps, p.83]
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.

Théorème 26 : Théorème de Cayley-Hamilton [Deschamps, p.99] :
Le polynôme caractéristique de u annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

Exemple 27 : [Deschamps, p.98]
Soient $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et la matrice :

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_{\mathcal{C}_P} = \pi_{\mathcal{C}_P} = P$.

Définition 28 : Multiplicité algébrique :
On considère λ une valeur propre de M.
On appelle **multiplicité algébrique de** λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_M (et on la note m_λ).

Proposition 29 : [Deschamps, p.84]
Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, on a : $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda \leq n$.

II Diagonalisation des endomorphismes

II.1 Critères de diagonalisabilité

Proposition 30 : [Deschamps, p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
* u est diagonalisable. * $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$. * $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.
* u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
* π_u est scindé à racines simples.

Corollaire 31 : [Deschamps, p.91]
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :
* Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
* Pour toute valeur propre λ de u, on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Corollaire 32 : [Deschamps, p.104]
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F est également diagonalisable.

Définition 33 : Matrice circulante [Gourdon, p.190] :
On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes.

Développement 1 : [cf. GOURDON + CALDERO]

Proposition 34 : [Gourdon, p.153]
Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Proposition 35 : [Caldero, p.45]
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a + b = 1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

II.2 Critère de co-diagonalisabilité

Définition 36 : Endomorphismes co-diagonalisables [Deschamps, p.104] :
On considère v et w deux endomorphismes de E.
Les endomorphismes v et w sont dits **co-diagonalisables** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de v et w sont diagonales.

Proposition 37 : [Deschamps, p.69]
Soient u et v deux endomorphismes de E.
Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre, ainsi que leurs noyaux et images.

Théorème 38 : [Deschamps, p.104]
Soient v et w deux endomorphismes de E.
v et w commutent si, et seulement si, v et w sont co-diagonalisables.

II.3 Topologie des matrices diagonalisables

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ et enfin on note $D_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonalisables, $T_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices trigonalisables et $B_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \mathrm{Card}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)\right) = n\}$.

Remarque 39 :
Puisque $n \geq 2$, on a les inclusions strictes : $B_n(\mathbb{K}) \subsetneq D_n(\mathbb{K}) \subsetneq T_n(\mathbb{K})$.

Proposition 40 :
Les ensembles $B_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $T_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs et ils ne sont pas bornés.

Proposition 41 : [Deschamps, p.322]
L'intérieur de $D_n(\mathbb{K})$ est $B_n(\mathbb{K})$.

Proposition 42 : [Hassan, p.713]
L'adhérence de $D_n(\mathbb{K})$ est $T_n(\mathbb{K})$.

III Endomorphismes remarquables diagonalisables

Dans toute cette partie, on suppose que $(E, <\cdot;\cdot>)$ est un espace euclidien sur $\mathbb{R}$.

III.1 Endomorphismes normaux

Définition 43 : Endomorphisme normal [Berhuy, p.95] :
On dit que u est un **endomorphisme normal** lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Lemme 44 : [Berhuy, p.98]
Soient u un endomorphisme normal de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Lemme 45 : [Berhuy, p.107]
Soit u un endomorphisme normal de E.
Si E est le plan euclidien, alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de E dans laquelle la matrice représentative de u dans cette base est, soit diagonale, soit de la forme : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.

Théorème 46 : Réduction des endomorphismes normaux [Berhuy, p.108] :
Soit u un endomorphisme normal de E.
Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs :
∗ de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
∗ de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

III.2 Endomorphismes orthogonaux

Définition 47 : Endomorphisme orthogonal [Deschamps, p.839]
On dit que u est un **endomorphisme orthogonal de** E lorsque :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < u(x); u(y) > = < x; y >$$

On note $\mathrm{O}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes orthogonaux.

Proposition 48 :
Soit u un endomorphisme orthogonal de E.
On a $u^* = u^{-1}$, donc u est un endomorphisme normal.

Proposition 49 : [Deschamps, p.839]
Soit $u \in O(E)$.
Si λ est une valeur propre de u, alors $|\lambda| = 1$.

Théorème 50 : [Deschamps, p.840]
Soit u un endomorphisme orthogonal de E.
Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs :
$*$ de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1; 1\}$.
$*$ de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in]-\pi\ 0[\cup]0; \pi[$$

III.3 Endomorphismes symétriques

Définition 51 : Endomorphisme symétrique [Deschamps, p.834] :
On dit que u est un **endomorphisme symétrique** lorsque :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < x; u(y) > = < u(x); y >$$

On note $S(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques.

Proposition 52 : [Deschamps, p.835]
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
Un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Proposition 53 : [Deschamps, p.835]
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Proposition 54 : [Deschamps, p.837]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposition 55 : [Deschamps, p.837]
Soient u un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Théorème 56 : Théorème spectral [Deschamps, p.837] :
Tout endomorphisme symétrique u de E est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.

Lemme 57 : Lemme de la racine carré [Rombaldi, p.739]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Théorème 58 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV Applications

IV.1 Décomposition de Dunford

Théorème 59 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]
Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E tel que d est diagonalisable, n est nilpotente, d et n commutent et $u = d + n$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Corollaire 60 : [Rombaldi, p.766]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, e^M est diagonalisable.

Exemple 61 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3}e^{bN+cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c+\frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.2 Calcul de puissances de matrices

Proposition 62 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, alors il existe une matrice diagonale de taille D et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$$

Exemple 63 : [Deschamps, p.88]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 3\times 2^{n-1} + 2^n\right) & -3\left(1 + 2^n - 2^{n-1}\right) & -2\left(1 + 2^{n-1} - 3\times 2^{n-1}\right) \\ 2\left(1-2^n\right) & -3 + 2^{n+2} & 2\left(2^n - 1\right) \\ 2\left(2^n-1\right) & -3\left(2^n-1\right) & -2\left(2^{n-1}-1\right) \end{pmatrix}$$

IV.3 Calcul d'exponentielles de matrices

Théorème 64 : [Rombaldi, p.761]

La fonction exp : $A \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est définie et continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 65 : [Rombaldi, p.764]

Soient $M, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M et N commutent, alors $e^{M+N} = e^Me^N$.

Théorème 66 : [Rombaldi, p.765]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.
Si l'on note $D+N$ la décomposition de Dunford de la matrice M, alors on a l'égalité $e^M = e^De^N = e^D\sum_{k=0}^{q-1}\frac{1}{k!}N^k$ et la décomposition de Dunford de e^M est donnée par $e^M = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Théorème 67 : [Rombaldi, p.779]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff (A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z})$$

Développement 2 : [cf. ROMBALDI]

Lemme 68 : [Rombaldi, p.767]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\rho(A) < 1$, alors $e^{\mathrm{Ln}(I_n+A)} = I_n + A$.

Lemme 69 : [Rombaldi, p.769]

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(M)$ soit diagonalisable et $e^{Q(M)} = M$.

Théorème 70 : [Rombaldi, p.769]

Pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que l'on ait $e^{Q(M)} = M$ (autrement dit : l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

Corollaire 71 : [Rombaldi, p.770]

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

On note désormais $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ < Sx; x >> 0\}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives (et on fait de même avec les matrices complexes hermitiennes).

Théorème 72 : [Rombaldi, p.771 + 780]

L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Théorème 73 :

L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarques sur la leçon

— Il est important de parler du caractère inductif de la diagonalisabilité.

— Il est possible de parler dans cette leçon de diagonalisation par blocs ainsi que de la réduction de Jordan.

— Il est également possible dans cette leçon de parler des endomorphismes semi-simples ainsi que des opérateurs normaux et auto-adjoints (et de parler des théorèmes spectraux).

Liste des développements possibles

— Matrices circulantes.

— Décomposition de Dunford.

— Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

— Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normée*.