Leçon 149 - Déterminant. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.
Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbb{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 149 intitulée : "Déterminant. Exemples et applications.". Pourquoi étudie-t-on les déterminants ? Il y a deux motivations principales : d'un côté l'aspect pratique du déterminant (caractérisations simples de la liberté, méthodes de calculs nombreuses) et de l'autre le fait qu'il possède de nombreuses applications (on pense à l'étude de systèmes linéaires, d'endomorphismes, etc). Tout cela rend donc cet outil puissant.
Avant de revenir à ses applications, commençons par le définir dans une première partie. On commence par parler des formes n-linéaires alternées en rappelant la définition ainsi que les principales propriétés. On s'intéresse ensuite au déterminant d'une famille de vecteurs. Pour cela, on remarque que l'ensemble des formes n-linéaires alternée est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par une application que nous appellerons déterminant et on donne son expression en proposition 9 qui est issue de celle de la proposition 6. On donne dans la suite de cette sous-partie quelques applications avec une caractérisation d'être une base ainsi que l'orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans une troisième sous-partie, on s'intéresse au déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice. On commence par le définir dans le cas d'un endomorphisme puis l'on passe rapidement au cas d'une matrice avec la correspondance endomorphisme-matrice et dont l'intérêt est justifié par le fait qu'il est plus simple de travailler avec la matrice que l'endomorphisme. On donne alors plusieurs règles de calcul avec l'exemple 20 ainsi que les propositions qui suivent.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux méthodes de calcul du déterminant. En effet, on se rendra compte par la suite que le déterminant apparaît dans beaucoup de situations et qu'il faut donc savoir le calculer avec le plus d'outils possibles. On commence par le cas des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui donnent des résultats puissants malgré leur simplicité (notamment avec l'algorithme du pivot de Gauss), puis ensuite au cas du développement par rapport à une ligne ou une colonne qui permet de facilement calculer le déterminant lorsque la matrice est triangulaire ou diagonale ou encore lorsque celle-ci est creuse. On donne également la définition des mineurs et cofacteurs qui permettent d'introduire la comatrice qui permet de calculer l'inverse d'une matrice notamment lorsque $n = 2$. On termine cette partie avec des calculs d'exemples classiques de déterminants avec le calcul par blocs, le déterminant de Cauchy ou encore les déterminant circulants et de Vandermonde.
Dans une troisième partie on s'intéresse à l'utilisation du déterminant en algèbre. Tout d'abord au travers du rang (ce qui peut être utile pour calculer la dimension du noyau d'une matrice avec le théorème du rang), puis dans le cas de la résolution d'un système linéaire avec les formules de Cramer et enfin en réduction des endomorphismes avec le polynôme caractéristique qui permet de caractériser un endomorphisme diagonalisable et trigonalisable.
Dans une avant-dernière partie on s'intéresse au déterminant en analyse, avec tout d'abord des résultats topologiques sur le déterminant et une norme ainsi que les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avant de passer au cas du changement de variables qui permet de

calculer des intégrales.
Enfin on termine cette leçon avec une application en géométrie où l'on commence par faire le lien entre les aires et volumes avant de passer au déterminant de Gram qui nous permet de calculer des distances à des sous-espaces vectoriels ainsi que les inégalités d'Hadamard.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on fixe une base $e = (e_1, ..., e_n)$ de E.

I Généralités

I.1 Formes n-linéaires alternées

Définition 1 : Forme n-linéaire alternée [Deschamps (1), p.1235] :
On dit qu'une forme n-linéaire f est **alternée** lorsque pour tous vecteurs $u_1, ..., u_n \in E$ et tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $u_i = u_j \implies f(u_1, ..., u_n) = 0$.

Proposition 2 : [Deschamps (1), p.1236]
Soit f une forme n-linéaire.
f est n-linéaire alternée si, et seulement si, f est antisymétrique.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on considère f une forme n-linéaire alternée.

Proposition 3 : [Deschamps (1), p.1236]
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Pour tout $(u_1, ..., u_n) \in E^n$, on a $f\left(u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, ..., u_n)$.

Proposition 4 : [Deschamps (1), p.1236]
Si $(u_1, ..., u_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(u_1, ..., u_n) = 0$.

Corollaire 5 : [Deschamps (1), p.1236]
Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Le scalaire $f(u_1, ..., u_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

Proposition 6 : [Deschamps (1), p.1237]
Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
En notant, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, on a l'expression suivante : $f(u_1, ..., u_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} f(e_1, ..., e_n)$.

I.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème 7 : [Deschamps (1), p.1237]
$*$ Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ_0 sur E telle que $\varphi_0(e_1, ..., e_n) = 1$.
$*$ Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0.

Définition 8 : Déterminant d'une famille de vecteurs [Deschamps (1), p.1238] :
On considère φ_0 l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\varphi_0(e_1, ..., e_n) = 1$.
Pour $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E, le scalaire $\varphi_0(u_1, ..., u_n)$ est appelé **déterminant de la famille de vecteurs** $(u_1, ..., u_n)$ **par rapport à la base** e et se note $\det_e(u_1, ..., u_n)$.

Proposition 9 : [Deschamps (1), p.1238]
En reprenant les notations de la proposition 6, on a alors l'expression : $\det_e(u_1, ..., u_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$.

Exemple 10 : [Deschamps (1), p.1238]
Reprenons les notations de la proposition 6.
∗ Pour $n = 2$, $\det_e(u_1, u_2) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. On notera dans ce cas $\det_e(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.
∗ Pour $n = 3$, $\det_e(u_1, u_2, u_3) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$ (règle de Sarrus (cf. I.3)).

Remarque 11 : [Deschamps (1), p.1238]
Les résultats énoncés en proposition 3 et 4 ainsi qu'au corollaire 5 sont encore valides avec $\det_e$.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on considère e' une autre base de e.

Proposition 12 : [Deschamps (1), p.1239]
Les formes linéaires $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont proportionnelles. Plus précisément, pour tout $(u_1, ..., u_n) \in E^n$, $\det_{e'}(u_1, ..., u_n) = \det_{e'}(e) \det_e(u_1, ..., u_n)$.

Corollaire 13 : [Deschamps (1), p.1239]
On a la relation $\det_{e'}(e) \det_e(e') = 1$.

Théorème 14 : [Deschamps (1), p.1239]
Soit $(u_1, ..., u_n) \in E^n$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E. ∗ $\det_e(u_1, ..., u_n) \neq 0$.

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ définit sur l'ensemble des bases de E la relation d'équivalence $e\mathcal{R}e' \iff \det_e(e') > 0$.

Il y a alors deux classes d'équivalence et choisir une orientation (arbitraire) pour le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E c'est choisir une classe d'équivalence (et donc un représentant e_{ref} de cette classe). Une base est alors dite **directe** lorsqu'elle appartient à la classe d'équivalence de e_{ref} et **indirecte** sinon).

I.3 Déterminant d'un endomorphisme/d'une matrice carrée

I.3.1 Cas d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, on considère f un endomorphisme de E.

Proposition 15 : [Deschamps (1), p.1241]
Il existe un unique scalaire λ appelé **déterminant de** f tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de e et tout $(u_1, ..., u_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), ..., f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_n)$. Le déterminant de f se note alors $\det(f)$ et pour toute base $\mathcal{B}$ de E on a l'égalité $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$.

Exemple 16 : [Deschamps (1), p.1242]
∗ Comme $\det_e(e) = 1$, on a $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
∗ Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère l'endomorphisme f tel que $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On a alors $\det(f) = \det_e(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition 17 : [Deschamps (1), p.1242]
Soient g un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ et $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

Proposition 18 : [Deschamps (1), p.1242]
f est un automorphisme si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
Auquel cas, on a $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

I.3.2 Cas d'une matrice carrée

Dans tout ce paragraphe, on considère une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 19 : Déterminant d'une matrice carrée [Deschamps (1), p.1243] :
On appelle **déterminant de** A le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on le note $\det(A)$.

Exemple 20 : [Deschamps (1), p.1243]
∗ Dans le cas $n = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
∗ Pour $n = 3$, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$.
Cette formule peut se retrouver à l'aide de la méthode de Sarrus : on recopie les deux premières lignes de la matrice sous la troisième et on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté d'un signe + ou -. Cependant cette méthode n'est pas généralisable pour $n \neq 3$!

Proposition 21 : [Deschamps (1), p.1243]
On a la formule : $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$.

Corollaire 22 : [Deschamps (1), p.1244]
Si $(u_1, ..., u_n)$ est une famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base e est A, alors $\det(A) = \det_e(u_1, ..., u_n)$.

Proposition 23 : [Deschamps (1), p.1244]
Soit f un endomorphisme de E.
Si A est la matrice de f dans la base e, alors $\det(A) = \det(f)$.

Remarque 24 :
Les propositions 17 et 18 sont analogues au cas d'une matrice.

Proposition 25 : [Deschamps (1), p.1245]
Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.

Corollaire 26 : [Deschamps (1), p.1245]
Le déterminant de la matrice A est égal au déterminant de la matrice $A^\intercal$.

Exemple 27 : [Deschamps (1), p.1245]
Le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul (ce résultat n'est plus vrai dans le cas d'une matrice pair).

II Méthodes de calcul du déterminant

II.1 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes

Proposition 28 : [Deschamps (1), p.1246]
* Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
* Échanger deux colonnes (resp. deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
* Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres est nul.
* Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est nulle est nul.
* La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).
* Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ.

Remarque 29 :
* Certaines de ces règles peuvent également se retrouver avec les matrices de transvections, dilatations et permutation par multiplication à gauche (respectivement à droite) de A.
* On peut utiliser le pivot de Gauss pour transformer une matrice carré en une matrice triangulaire supérieure qui lui est équivalente en utilisant seulement les trois types de matrices ci-dessus et le calcul du déterminant devient alors immédiat (cf. II.2) et en particulier si le système possède une solution ou non.

Exemple 30 : [Deschamps (1), p.1246]

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

II.2 Développement par rapport à une ligne/colonne

Jusqu'à la notion de comatrice, on suppose que $n \geq 2$.

Proposition 31 : [Deschamps (1), p.1247]
Si A est une matrice carrée de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ * & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \det(A')a_{n,n}$.

Corollaire 32 : [Deschamps (1), p.1247]
Si A est une matrice triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
En particulier, si A est une matrice diagonale, alors on a la même formule.

Définition 33 : Mineur et cofacteur [Deschamps (1), p.1248]
On considère $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.
On appelle :
* **mineur de** $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
* **cofacteur de** $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 34 : [Deschamps (1), p.1248]
On a le développement suivant par rapport à une colonne/ligne :

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} \text{ et } \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Exemple 35 : [Deschamps (1), p.1248]
On considère trois scalaire a, b et c.
On a alors : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Définition 36 : Comatrice [Deschamps (1), p.1251] :
On appelle **comatrice de** A (notée $\mathrm{Com}(A)$) la matrice des cofacteurs de A.

Proposition 37 : [Deschamps (1), p.1251]
On a la relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\intercal = \mathrm{Com}(A)^\intercal A = \det(A) I_n$.
En particulier, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^\intercal$.

Exemple 38 : [Deschamps (1), p.1251]
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bd} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque 39 : [Deschamps (1), p.1251]
En pratique, à l'exception du cas $n = 2$, on n'utilise pas cette formule pour inverser une matrice mais on préfère passer par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Exemple 40 : [Deschamps (1), p.1251]
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
On a $\det(A) \in \mathbb{Z}$ et de plus, on a l'équivalence :

$$(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ tq } AB = I_n) \iff (\det(A) = \pm 1)$$

II.3 Exemples classiques

II.3.1 Déterminant par blocs

Proposition 41 : [Deschamps (1), p.1249]
Si A s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \det(A_1)\det(A_3)$.

Exemple 42 : [Deschamps (1), p.1249]

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

II.3.2 Déterminant de Cauchy

Proposition 43 : [Gourdon (1), p.150]
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}$.

II.3.3 Déterminant circulant

Définition 44 : Matrice circulante [Gourdon (1), p.190] :
On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes.

Proposition 45 : [Gourdon (1), p.153]
Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Proposition 46 : [Caldero, p.45]
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a + b = 1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z'_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z'_i = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

II.3.4 Déterminant de Vandermonde

Proposition 47 : [Deschamps (1), p.1250]
Soient $x_0, ..., x_n$ des scalaires.

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leq i,j\leq n} (x_j - x_i)$$

Remarque 48 : [Deschamps (1), p.1250]
Une matrice de Vandermonde est inversible si, et seulement si, les $x_1, ..., x_n$ sont deux à deux distincts.

Développement 1 : [cf. FRANCINOU]

Théorème 49 : Théorème de Burnside [Francinou, p.353] :
Soit G est sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Si G est d'exposant fini, alors G est fini.

III Application du déterminant en algèbre

III.1 Lien avec le rang

Dans toute cette sous-partie, on considère $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 50 : [Deschamps (1), p.1161]
Le rang de A est égal à r si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :
$*$ On peut trouver dans A une sous-matrice $r \times r$ inversible.
$*$ Aucune sous-matrice $s \times s$ de A, avec $s > r$, n'est inversible.

Remarque 51 : [Deschamps (1), p.1161]
Autrement dit, le rang de A est égal à la plus grande taille des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

III.2 Résolution d'un système linéaire

Proposition 52 : Formules de Cramer [Gourdon (1), p.144] :
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X, B \in \mathbb{K}^n$.
Le système $(S) : AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, on a $\det(A) \neq 0$.
Et dans ce cas, en notant $(A_1, ..., A_n)$ les colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ on a : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i = \frac{\det_{\mathcal{B}}(A_1,...,A_{i-1},B,A_{i+1},...,A_n)}{\det_{\mathcal{B}}(A)}$.

Exemple 53 :
Le système :
$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{array} \right.$$
admet $(5, 1, 1)$ pour unique solution.

Remarque 54 : [Gourdon (1), p.144]
Il existe également le théorème de Rouché-Fontené qui permet de dire si un système quelconque (c'est-à-dire non nécessairement carré) admet des solutions ou non.

III.3 Réduction matricielle

Dans toute cette sous-partie, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 55 : Polynôme caractéristique [Deschamps (2), p.78] :
On appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ définit par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Théorème 56 : [Deschamps (2), p.78]
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, c'est une racine de χ_M.

Exemple 57 : [Deschamps (2), p.78]
Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est le polynôme $\chi_A = (X-2)\left(X^2 - X + 1\right)$.

Proposition 58 : [Deschamps (2), p.79 + 81]
$*$ Les matrices M et $M^\intercal$ ont le même polynôme caractéristique.
$*$ Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Proposition 59 : [Deschamps (2), p.80]
Le polynôme caractéristique de M est un polynôme unitaire de degré n et on a : $\chi_M(X) = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(M)$.

Proposition 60 : [Deschamps (2), p.86]
Si χ_M est scindé, alors $\det(M)$ est le produit de ses valeurs propres.
En particulier, M est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une valeur propre de M.

Proposition 61 : [Deschamps (2), p.88 + 102]
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ où les $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont distincts deux à deux, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est diagonalisable. $*$ $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$. $*$ $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.
$*$ u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
$*$ π_u est scindé à racines simples.

Corollaire 62 : [Deschamps (2), p.91]
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :
* Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
* Pour toute valeur propre λ de u, on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Théorème 63 : [Deschamps (2), p.93 + 103]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* u est trigonalisable. * u possède un polynôme annulateur scindé.
* Le polynôme minimal de u est scindé.

IV Application du déterminant en analyse

IV.1 Topologie

Développement 2 : [cf. GOURDON (2)]

Lemme 64 : [Gourdon (2), p.330]
Soient E,F et G trois espace vectoriels de dimension finie et $\varphi : E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.
L'application φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \forall (h,k) \in E \times F,\ d\varphi_{(x,y)}(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)$$

Proposition 65 : [Gourdon (2), p.332]
Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)_M(H) = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Com}(M)^\intercal H\right)$$

Proposition 66 : [Gourdon (2), p.341]
Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Théorème 67 : [Rombaldi, p.688]
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Corollaire 68 : [Rombaldi, p.153 + 154]
* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.
* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Corollaire 69 : [Rombaldi, p.689]
Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Corollaire 70 : [Rombaldi, p.689]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.2 Changement de variables

Théorème 71 : [Rouvière, p.214]
Soit $F : (t,u) \longmapsto (f(t,u), g(t,u))$ un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et identiquement nulle en dehors d'un compact suffisamment petit, on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(F(t,u))|\det(dF(t,u))|\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

Exemple 72 : [Rouvière, p.215]
Si on a le changement en coordonnées polaire $F : (r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Exemple 73 :
On peut par exemple calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour $a > 0$.

V Application du déterminant en géométrie

V.1 Aire et volume

Proposition 74 : [Deschamps (1), p.1240]
Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan usuel $\mathbb{R}^2$.
Le réel $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ représente l'aire orientée du parallélogramme $ABCD$.

Proposition 75 : [Deschamps (1), p.1241]
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$.
Le réel $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Remarque 76 :
On peut définir de manière analogue le volume orienté d'un parallélotope dans $\mathbb{R}^n$.

V.2 Déterminant de Gram et inégalités d'Hadamard

Dans toute cette partie, on suppose que E est un espace préhilbertien (réel ou complexe).

Définition 77 : Matrice de Gram [Gourdon (1), p.274] :
On considère $x_1, ..., x_n$ n vecteurs de E.
On appelle **matrice de Gram** la matrice $(< x_i ; x_j >)_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ et on note $G(x_1, ..., x_n)$ son déterminant.

Proposition 78 : [Gourdon (1), p.274]
$*$ Toute matrice de Gram est hermitienne positive et réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram.
$*$ De plus, la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, ..., x_n$ est définie si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre.

Théorème 79 : [Gourdon (1), p.275]
Soient E un espace préhilbertien réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension n muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$, alors pour tout $x \in E$, on a : $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, ..., e_n, x)}{G(e_1, ..., e_n)}$.

Corollaire 80 : Inégalité d'Hadamard [Gourdon (1), p.273] :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$*$ Si $x_1, ..., x_n \in E$, alors $G(x_1, ..., x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
$*$ Si $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}$, alors $|\det(v_1, ..., v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|$.

Remarque 81 :
De plus, on a égalité si, et seulement si, la famille de vecteurs contient un vecteur nul ou est orthogonale. Ainsi, dans le cas d'un espace préhilbertien réel E, le volume d'un parallélotope P de E est égal au produit des longueurs de ses côtés si, et seulement si, P est un parallélotope droit.

Remarques sur le plan

- On peut également parler de formes quadratiques, de résultant et du théorème de Frobenius-Zolotarev.
- Le volume d'un parallélotope dépend de la base choisie !
- Il faut également savoir montrer que le polynôme caractéristique χ_M appartient bien à $\mathbb{K}[X]$!

Liste des développements possibles

- Matrices circulantes.
- Théorème de Burnside.
- Matrice minimisant la norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.
- Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.
- Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.