Clément DESCLANDES.

107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

'C4

I - Représentations et caractères

1) Représentations

Def. 1 Une représentation linéaire d'un groupe G est une action linéaire de G sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, ie la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$

Rmq. 2 On supposera dans toute cette leçon G fini, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, V de dimension finie.

Ex. 3 • Tout morphisme $G \to \mathbb{C}^* = GL(\mathbb{C})$ est une représentation

• Si $G \subset GL(V)$, on a une représentation naturelle : $G \curvearrowright V$ par $g \cdot x = g(x)$

• Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{C}^n$ par $\sigma . e_i = e_{\sigma(i)}$.

• De même G agit sur V de base $(e_g)_{g \in G}$ par $g \cdot e_h = e_{gh}$ (représentation régulière).

Prop 4 Pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

2) Caractères

Def 5 Le caractère d'une représentation (ρ, V) est l'application $\chi_\rho : g \mapsto Tr(\rho(g))$.

Rmq 6 χ_ρ est un morphisme si $\dim V = 1$. On dit alors que c'est un caractère linéaire.

Ex 7 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ω racine primitive n-ième de l'unité. $\chi_k : \overline{m} \mapsto \omega^{km}$ est un caractère linéaire.

Ex 8 Pour la représentation de $\mathfrak{S}_n$ vu en ex. 3, $\chi_\rho(g)$ est le nombre de points fixes de g.

Def 9 Soient (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) deux représentations de G. $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ est la représentation définie par l'action sur $V_1 \oplus V_2$ $g.(v_1, v_2) = (g.v_1, g.v_2)$.

Prop 10 $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

3) Morphismes de représentations.

Def 11 Pour $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ deux représentations, on construit $(\rho_{Hom(V_1, V_2)}, Hom(V_1, V_2))$ définie par l'action $g \cdot f = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1})$.

Prop 12 $\chi_{Hom(V_1, V_2)} = \overline{\chi_{\rho_1}} \chi_{\rho_2}$.

Def 13 $Hom_G(V_1, V_2) = \{ f \in Hom(V_1, V_2) \mid \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1}) = f \ \forall g \in G \}$

<u>Rmq 14</u> C'est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ des éléments fixes par l'action de G.

<u>Prop 15</u> Soit $f \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$. Alors $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_2(g)\circ f\circ \rho_1(g^{-1}) \in \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$

<u>Def 16</u> Soient (ρ_1,V_1), (ρ_2,V_2) deux représentations. Elles sont dites isomorphes ssi il existe $f\in \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ <u>isomorphisme</u>. <u>Rmq 16'</u> : isomorphes $\Rightarrow$ même caractère.

<u>Def 17</u> Une représentation (ρ, V) est dite irréductible ssi les seuls sous-espaces stables par ρ (ie stable par tous les $\rho(g)$) sont $\{0\}$ et V.

<u>Ex 18</u> Si $\dim V = 1$, (ρ, V) est irréductible

<u>Prop 19</u> Soit V de base $(e_1,\dots,e_n)$ et $W=\{x_1e_1+\dots+x_ne_n \mid x_1+\dots+x_n=0\}$. La représentation ρ de l'ex. 3 de $\mathfrak{S}_n$ sur V laisse stable W, et $(\rho_{|W}, W)$ est irréductible.

II - Décomposition en représentations irréductibles

1) Le théorème de Maschke.

<u>Prop 20</u> Soit (ρ,V) une représentation de G. Il existe un produit scalaire sur V invariant sous l'action de G.

<u>Thm 21</u> Soit (ρ, V) une représentation de G. Il existe $V_1,\dots,V_k$ tels que $V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$ et $\rho_{|V_i}$ sont irréductibles.

2) Le lemme de Schur et ses conséquences.

<u>Thm 22</u> (Lemme de Schur). Soit (ρ_1,V_1), (ρ_2,V_2) deux représentations de G. Si elles sont non isomorphes, $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=\{0\}$. Si $V_1 = V_2$, $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ sont les homothéties.

<u>Cor 23</u> Si $(\rho_1,V_1)\not\simeq(\rho_2,V_2)$ et $f\in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, par la prop 15 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)\circ f\circ\rho_1(g^{-1}) = 0$.

Si $\begin{matrix} V_1=V_2 \\ \rho_1=\rho_2\end{matrix}$, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)\circ f\circ\rho_1(g^{-1}) = \frac{1}{\dim V_1}\,\mathrm{Tr}\, f\, \mathrm{Id}_{V_1}$.

<u>Def 24</u> $\varphi : G\to\mathbb{C}$ est dite <u>centrale</u> si $\left(\begin{matrix}\varphi(hgh^{-1})=\varphi(g)\\ g,h\in G\end{matrix}\right.$.
On note $R_{\mathbb{C}}(G)$ l'ensemble des fonctions centrales.

<u>Rmq 26'</u> Tout caractère est central.

<u>Thm 25</u> (Frobenius) Les caractères irréductibles forment une base de $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}(G)$, orthonormale pour le pdt scalaire (sur $\mathbb{C}^G$) $\langle \Phi_1,\Phi_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\Phi_1(g)}\,\Phi_2(g)$.

<u>Cor 26</u> Le nombre de représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

<u>Ex 26'</u> nombre moyen de pts fixe d'une permutation : 1

<u>Cor 27</u> Si $V=W_1\oplus\dots\oplus W_k$ est une décomposition de (ρ,V) en représentations irréductibles, pour (ρ',W) irréductible, le nombre de W_i tels que $(\rho_{|W_i}, W_i)\simeq(\rho',W)$ est égal à $\langle \chi_W,\chi_V\rangle$.

<u>Cor 28</u> Deux représentations ayant même caractère

3) Table des caractères.

Def 29 Soit c le nombre de classe de conjugaison de G. Si $\chi_1, \dots, \chi_c$ sont les caractères irréductibles de G, la table de caractère est la matrice T_G de coefficient $(1 \leq i, j \leq c)$ $\chi_i(g_j)$ où g_j appartient à la j-ème classe de conjugaison.

Prop 30 Soit K la matrice diagonale de j-ième terme le cardinal de la j-ème classe. On a $T_G \, K \, T_G^* = |G| I_c$.
Autrement dit $\tilde{T}_G := \left(\frac{K}{|G|}\right)^{1/2} T_G$ est unitaire.

Ex 30 Tables de caractère en annexe.

Rmq 31 En particulier, $\sum (d_i - V_i)^2 = |G|$.

Prop 32 Soit $\mathcal{B}$ une base de $\overline{V_1 \oplus \dots \oplus V_k}$ les rep. irréduc dans laquelle les matrices des représentation sont unitaires.
Alors les $\sum n_i^2 = |G|$ fonctions coordonnées forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$.

Ex 33 Sondage (en annexe) $\to$ interprétation statistique.

Prop 34 G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.

Prop 35 G est simple si et seulement si T_G n'a de 1 que dans la 1ère colonne ou ligne du caractère trivial.
Plus précisément,

Prop 36 : Les sous groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, c\}$ DVP1
$K_\chi := \{ g \in G \mid \chi(g) = 1 \}$.

4) Application à la réduction

Ex 37 : modes vibratoire de 3 masses
Ex 38 : moyennisations d'un dé] DVP2

5) Analyse de Fourier

Def 39 Pour $f : G \to \mathbb{C}$, ρ rep, on note $\hat{f}(\rho) = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)$

Prop 40 $f(s) = \frac{1}{|G|} \sum \dim(\rho_i) \operatorname{Tr}(\rho_i(s^{-1}) \hat{f}(\rho_i))$.

$$\sum_{s \in G} f(s^{-1}) h(s) = \frac{1}{|G|} \sum \dim(\rho_i) \operatorname{Tr}(\hat{f}(\rho_i) \hat{h}(\rho_i))$$

où la somme est sur les rep. irréduc.

Ex 41 Paquet de carte mélangé par des transpositions
$\cancel{\| P^{*k} - U \|^2 \leq \frac{1}{4} \sum_\rho d_\rho^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{\chi_\rho(\tau)}{d_\rho} \right)^{2k}}$
$\cancel{\text{car } \| Q - U \|^2 \leq \sum_\rho d_\rho \operatorname{Tr}(\hat{Q}(\rho) \hat{Q}(\rho)^*)}$.
Temps de mélange en $\frac{1}{2} \log(n)\, n$

Annexe

- sondage :

ville	banlieue	campagne	résultat
1	2	3	242
2	1	3	170
3	2	1	359
1	3	2	28
2	3	1	72
3	1	2	628

ρ_1 triviale, ρ_2 alternée, ρ_3 standard

base $\frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$, $\frac{e_1 + e_2 - 2e_3}{\sqrt{6}}$ $\rightarrow$ fcts coordonnées

Projection $\rightarrow$ Fonction coordonnée privilégiée :

$(0, 0, -0{,}87, 0{,}87, 0.87, -0.87)$

$\rightarrow$ indicateur : ce qui est classé dernier.

Exemples de tables de caractère

$\mathfrak{S}_3$:

	1 id	3 (12)	2 (123)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

$\mathfrak{S}_4$:

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_{std}	3	-1	0	1	-1
$\varepsilon\chi_{std}$	3	1	0	-1	-1

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

	0	1	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	j	j^2
χ_3	1	j^2	j