Ref : Artin : Algèbre Géométrique — Mneimné - Testard : Groupes de Lie classiques

Caldero - Germoni : Histoires hédonistes de groupes et de géométrie

106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, Sous-groupes de $GL(V)$. Applications

Dans toute la suite, K désignera un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie n.

Dans tous les énoncés où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M_n(K)$ sera muni de sa topologie de l'espace vectoriel normé.

I / Groupe linéaire

Déf 1 : On note $GL(V)$ le groupe des inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(V)$.
On note $SL(V)$ le noyau du morphisme $\det : GL(V) \to K^\times$.
De même, on note, pour $n \geq 1$, $GL_n(K) = M_n(K)^\times$ et $SL_n(K) = \det^{-1}(\{1\})$.

Rq 2 : Le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V fournit un isomorphisme de K-algèbres $\mathcal{L}(V) \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}} M_n(K)$ ($n = \dim V$) et induit donc un isomorphisme de groupes $GL(V) \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}} GL_n(K)$, bicontinu lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}} & GL_n(K) \\ & {\scriptstyle\det}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\det} \\ & & K^\times \end{array}$$

De plus, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant choisies, l'automorphisme ϕ de $GL_n(K)$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}} & GL_n(K) \\ & {\scriptstyle M_{\mathcal{B}'}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ & & GL_n(K) \end{array}$$

est de la forme $M \mapsto PMP^{-1}$, avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On énoncera donc indifféremment les résultats dans la suite au moyen de $GL(V)$ ou de $GL_n(K)$.

Prop 3 : Si $K = \mathbb{F}_q$, on a $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)\cdots(q^n-q^{n-1})$, $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

Déf 4 : On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in K$.
On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $D(\mu) = I_n + (\mu - 1) E_{nn}$ pour $\mu \in K^\times$.

Prop 5 : Toute matrice $M \in GL_n(K)$ s'écrit d'une unique manière sous la forme $M = S D_n(\mu)$ avec $S \in SL_n(K)$, $\mu \neq 0$.
D'où l'isomorphisme $GL_n(K) \simeq SL_n(K) \rtimes K^\times$, bicontinu si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 6 :
- les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.
- les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$.

Application 7. $SL_n(K)$ est connexe si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe. $GL_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes, à savoir $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M < 0\}$.

Application 8 : L'ensemble $\Pi = \{P \in M_n(K) \mid P^2 = P\}$ a exactement $n+1$ composantes connexes si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Prop 9 : Le centre de $GL_n(K)$ est $K^\times I_n$.

Prop 10 : Le groupe dérivé de $GL_n(K)$ est $SL_n(K)$ si $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_2)$

Corollaire 11 (Frobenius, Zolotarev) : Soit $g \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $\tau_g : \begin{array}{l} \mathbb{F}_p^n \longrightarrow \mathbb{F}_p^n \\ v \mapsto gv \end{array}$

On a $\tau_g \in \mathfrak{S}(\mathbb{F}_p^n)$ et $\varepsilon(\tau_g) = \left(\frac{\det g}{p}\right)$.

II / Actions du groupe linéaire et sous-groupes de $GL(V)$

1) Action par équivalence

Prop 12 : $GL_n(K) \times GL_p(K)$ agit sur $M_{n,p}(K)$ par $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$

Les orbites de $M_{n,p}$ sont paramétrées par le rang.
En particulier, si $rg(A) = r \leq \min(n,p)$, alors, à un isomorphisme près,
$\mathrm{Stab}(A) \simeq \mathrm{Stab}(J_{n,p,r})$
$\simeq (M_{r,n-r}(K) \times M_{p-r,r}(K)) \rtimes (GL_r(K) \times GL_{n-r}(K) \times GL_{p-r}(K))$

Application 13 : Tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Application 14 : Calcul du nombre de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{F}_q)$ de rang r

2) Action à droite sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Déf 15 : On appelle pivot d'une colonne non nulle le coefficient non nul de plus petit indice.

Une matrice $M = [C_1 \cdots C_p]$ est dite échelonnée en colonnes si :
- la ligne de chaque pivot est nulle hors du pivot
- si C_i et C_{i+1} sont non nulles le pivot de C_{i+1} est strictement plus bas que celui de C_i
- si $C_i = 0$ alors $C_j = 0$ pour tout $j \geq i$
- chaque pivot vaut 1.

Ex 16 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes.

Prop 17 : Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont sur la même orbite sous l'action à droite de $GL_p(K)$ par $P.A = AP^{-1}$ si et seulement si leurs colonnes engendrent le même espace vectoriel.

Par ailleurs, chaque orbite contient une et une seule matrice échelonnée en colonnes.

Application 18 : La surface d'équation projective $x^3+y^3+z^3+t^3 = 0$ dans $\mathbb{CP}^3$ contient exactement 27 droites.

3) Action sur les drapeaux

Déf 19 : On appelle drapeau de V une famille de sev $(V_1, \ldots, V_n)$ telle que $\forall i \leq n-1$, $V_i \subseteq V_{i+1}$ et $\dim V_i = i$.

Ex 20 : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(V_i = \mathrm{Vect}(e_k, 1 \leq k \leq i))$ est un drapeau.

Prop-déf 21 : $GL(V)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux et les stabilisateurs sont tous conjugués au sous-groupe $B_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} = T_n(K) \cap GL_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(K)$.

Prop-déf 22 Le groupe dérivé de $B_n(K)$ est le groupe $TU_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ des matrices triangulaires unipotentes supérieures. si $n \geq 3$

Prop 23 : Si $K = \mathbb{F}_p$, p premier, $TU_n(\mathbb{F}_p)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $B_n(\mathbb{F}_p)$.

Corollaire 24 (Sylow) : Si G est un groupe fini, $p \mid |G|$, alors G admet un p-sous-groupe de Sylow.

Prop 25 (Iwasawa) : Si $K = \mathbb{R}$, toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme un produit $M = QR$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in B_n(\mathbb{R})$.

Application 26 (Hadamard) : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \ldots, C_n$, alors
$|\det M| \leq \|C_1\|_2 \cdots \|C_n\|_2$

4) Action sur les formes quadratiques

On suppose $\mathrm{car}(K) \neq 2$

Prop 27 : $GL(V)$ agit sur l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur V via $f.q = q \circ f$.

L'action correspondante sur les matrices symétriques est la congruence : $P.M = PM\,{}^tP$.

Prop 28 : Si $K = \mathbb{C}$, $GL(V)$ agit transitivement
Si $K = \mathbb{R}$, les orbites sont caractérisées par la signature (p,q).
Si K est fini, deux formes ont la même orbite ssi $\det q = \det q' \mod (K^*)^2$

Déf 29 : On appelle groupe orthogonal $O(q)$ le stabilisateur de q pour l'action de $GL(V)$
spécial orthogonal $SO(q)$ le groupe $O(q) \cap SL(V)$.

En particulier, si $K = \mathbb{R}$, on note $O(p,q)$ le stabilisateur de la forme $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$.

Rq 30 : Si $K = \mathbb{C}$, $GL(V)$ agit de la même manière sur les formes hermitiennes et on note $U(V)$ le stabilisateur du produit hermitien.

III / Topologie de $GL_n(K)$: Décomposition polaire

On suppose ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Prop 30 : $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$

Application 31 : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Prop 32 : Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp $GL_n(\mathbb{C})$) stable par transposition (resp. adjonction) et tq $G \cap S_n^{++}$ (resp $G \cap H_n^{++}$) soit stable par passage à la racine carrée ; alors on a un homéomorphisme : $G \simeq (G \cap O(n)) \times (G \cap S_n^{++})$
(resp : $G \simeq (G \cap U(n)) \times (G \cap H_n^{++})$)

Corollaire 33 : $O(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$
$U(n)$ — $GL_n(\mathbb{C})$

Prop 34 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo
$H_n(\mathbb{R}) \to H_n^{++}(\mathbb{R})$ —

Prop 35 : Toute matrice de $SO(n)$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots R_{\theta_r} & \\ & & I_p \end{pmatrix}$, où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

Corollaire 36 : $SO(n)$ est connexe. $O(n)$ a exactement deux composantes connexes.

Prop 37 : On a des homéomorphismes $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$

Prop 38 : On a un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.] DVT 1
En particulier, $O(p,q)$ a quatre composantes connexes si $pq \neq 0$.

IV - Sous-groupes finis de $GL_n(K)$

Prop 39 : On a un plongement $\mathfrak{S}_n \to GL_n(K)$
$\sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j \leq n}$

Prop 40 : Si $K = \mathbb{R}$, tout sous-groupe de $GL_n(K)$ est conjugué à un sous-groupe de $O(n)$
Si $K = \mathbb{C}$, tout sous-groupe de $GL_n(K)$ est conjugué à un sous-groupe de $U(n)$

Ex 41 : Tout sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{R})$ est cyclique ou diédral

Propo : Soit H un sous-groupe fini de $K^\times$ et $h = |H|$.
Tout sous-groupe abélien de $GL_n(K)$ d'exposant h est isomorphe à un sous-groupe de H^n.

Prop 43 : Si $m \neq n$, $GL_m(K)$ n'est pas isomorphe à $GL_n(K)$] DVT 2