

Leçon 191: Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

Références: Romaldi, Gourdon, Perrin, Ladegaillette, Debeaumont 4, Aebischer, Cozard (Gram)

I - Utilisation de la Théorie des groupes

- 1) Isométries vectorielles et angles orientés
- 2) Espaces affines, groupe affine
- 3) Isométries conservant un polygone / polyèdre régulier

II - Utilisation de l'algèbre linéaire et bilinéaire

- 1) Distance à un sous-espace vectoriel
- 2) Coniques d'un plan affine euclidien

III - Utilisation des extensions de corps

- 1) Constructions géométriques à la règle et au compas
- 2) Construction du polygone régulier à n côtés

DEV 1: Théorème de Cartan - Dieudonné

DEV 2: Par 5 points passe une conique

Leçon 19: Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

⚠ Changement de plan
→ se référer au plan résumé

I - Utilisation de l'algèbre linéaire et bilinéaire

1) Distance à un sous-espace vectoriel [Rat] [Gov]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien

DEF 1: Soit $x \in E$, F un sous-espace vectoriel (sev) de E . On définit la distance de x à F par $d(x, F) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in F \}$

THM 2: Soit F un sev de E . Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. On appelle y la projection de x sur F et on note $y = P_F(x)$.

PROP 3: Pour F sev de E , $x \in E$, y est l'unique vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$. Si $B = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée (BON) de F , on a $P_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i$

COR 4: $\forall x \in E$, on a $\|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2$

EX 5: Si $D = \text{Vect}(a)$ est une droite vectorielle, $P_D(x) = \langle x | a \rangle \frac{a}{\|a\|^2}$

COR 6: Pour tout sev F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.

DEF 7: Soient $x_1, \dots, x_p \in E$. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_p$ la matrice $(\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$. Son déterminant, appelé déterminant de Gram, se note $G(x_1, \dots, x_p)$.

THM 8: Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ où $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Soit $x \in E$. Alors $d(x, F)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)}$

PROP 9: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $x_1, \dots, x_p \in E$, $G(x_1, \dots, x_p) \leq \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2$. De plus, pour $x_1, \dots, x_m \in E$, $|\det(x_1, \dots, x_m)| \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|$.

REM 10: Le déterminant relatif à une base B d'une famille de vecteurs donne le volume du pavé engendré par la famille. PROP 9 (Inégalité d'Hadamard) montre qu'un tel volume est majoré par celui du pavé droit.

APPLI 11: $\inf_{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m} \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_m x^m)^2 dx = \frac{1}{(m+1)^2}$

2) Classification des isométries vectorielles $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidiennes

DEF 12: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie lorsque: $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries.

PROP 13: $u \in O(E) \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$. $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

PROP 14: $u \in O(E)$ s'écrit seulement si matrice M dans une BON de E est orthogonale: ${}^tM = I_n = M^{-1}$. On note $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales. On a alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$. On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$.

THM 15: Soit $u \in O(E)$, $p_u = \text{rg}(u - \text{Id}_E)$. Alors u est produit d'exactly p_u réflexions.

THM 16: Soit $u \in SO(E)$. Alors u est produit d'un plus d'rotations.

REM 17: On dit donc que $O(E)$ est engendré par les réflexions, $SO(E)$ est engendré par les rotations.

PROP 18: Soit $u \in O(E)$. Si un sev F de E est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

PROP 19: Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie admet soit une droite stable soit un plan stable.

PROP 20: Si $\dim(E) = 2$, $u \in O(E)$, il existe θ une BON de E telle que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ ou $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dans le premier cas, u est une rotation ($\det(u) = 1$), dans le cas contraire, u est une réflexion par rapport à une droite ($\det(u) = -1$).

THM 21: Soit $u \in O(E)$, $\dim(E) \geq 2$. Il existe B une BON de E telle que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & \\ 0 & & R_n \end{pmatrix}$ avec $p + 2r = n$ et $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$, $\theta_k \in \mathbb{R}$.

THM 22: $\dim(E) = 3$. Si $u \in SO(E)$, alors $u = \text{Id}_E$, ou il existe une BON B tel que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (rotation) ou $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (rotation).

• Si $u \notin SO(E)$, $u = -\text{Id}_E$ ou il existe B une BON de E tel que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réflexion) ou $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (antirotation).

3) Angles orientés [AUD] ($E, \langle \cdot, \cdot \rangle$) euclidien, $\dim(E) = 2$

PROP 22. Soit U l'ensemble des vecteurs unitaires. Soit $u, u' \in U$. Il existe une unique rotation $r \in SO(E)$, $r(u) = u'$.

DEF 24. On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires: $(u, v) R (u', v') \Leftrightarrow \exists r \in SO(E), \begin{cases} r(u) = u' \\ r(v) = v' \end{cases}$. La classe d'équivalence de (u, v) , notée (u, v) , est l'angle orienté de u et v .

DEF 25. Le quotient $\mathcal{A} = U \times U / R$ est appelé ensemble des angles orientés de vecteurs.

PROP 26. PROP 23 permet de définir $\hat{\phi}: U \times U \rightarrow SO(E)$ qui à un couple de vecteurs associe l'unique rotation envoyant l'un sur l'autre. (u, u') et (v, v') ont même image par $\hat{\phi}$ si et seulement si ils définissent le même angle orienté.

COR 27. $\hat{\phi}$ définit donc bien $\phi: \mathcal{A} \rightarrow SO(E)$ l'application de réciproque $f \mapsto (u, f(u))$ pour tout $u \in U$. On définit alors une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}$ par transport de structure.

PROP 28. (Choles) On a $2(u, v) + (v, w) = (u, w)$.

PROP 29. On oriente E . Alors la matrice de $f \in SO(E)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ bien défini mod 2π est l'angle de la rotation f .

θ est une mesure de l'angle orienté $(u, f(u))$.

PROP 30. L'application composée: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow SO(E) \rightarrow \mathcal{A}$ est surjective. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow SO(E) \rightarrow \mathcal{A}$ est injective.

4) Coniques d'un plan affine euclidien [RAT] [DEF] [AFB]

Dans P un plan affine euclidien de direction P . Soit $R = (e_1, e_2)$ un repère orthonormal de P . On écrit $M(x, y)$ pour signifier $\vec{OM} = xe_1 + ye_2$. Pour $A, B \in P$, $d(A, B) = AB = \| \vec{AB} \|$.

DEF 31. Une conique dans P est une courbe algébrique $\mathcal{C}$ de degré 2 ou $\mathcal{C} = \{ M(x, y) \in P / F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \}$. On dit que $\mathcal{C}$ est une conique propre lorsque F est irréductible.

REM 32. On note $F(M) = Q(\vec{OM}) + L_0(\vec{OM}) + f_0$ où Q est une forme quadratique, L_0 une forme linéaire et f_0 une constante.

REM 33. Si on change l'origine O en O' , Q reste inchangée.

DEF 34. On appelle centre de $\mathcal{C}$ tout point Ω tel que $L_0 = 0$.

On dit que $\mathcal{C}$ est à centre lorsqu'un tel point existe et est unique.

THM 35. On obtient les centres de $\mathcal{C}$ en annulant les dérivées partielles de F .

REV 2

THM 36. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan.

- 1) Il existe une conique passant par les 5 points.
- 2) La conique est unique si et seulement si 4 points ne sont pas alignés.
- 3) La conique est non dégénérée si et seulement si 3 points ne sont pas alignés.

PROP 37. Soit $\mathcal{C}$ une conique propre. λ_1, λ_2 les valeurs propres réelles de la matrice associée à Q .

→ Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

→ Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

→ Si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\mathcal{C}$ est une parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ avec $A, B > 0, p \neq 0$.

PROP 38. Soit $\mathcal{C}$ une conique de signature (s, t) . Alors:

- Si $(s, t) = (2, 0)$ et $F(\Omega) > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation $X^2 + Y^2 = 1$.

- Si $(s, t) = (2, 0)$ et $F(\Omega) < 0$, $\mathcal{C} = \emptyset$.

- Si $(s, t) = (2, 0)$ et $F(\Omega) = 0$, $\mathcal{C}$ est un point.

- Si $(s, t) = (1, 1)$ et $F(\Omega) \neq 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$.

- Si $(s, t) = (1, 1)$ et $F(\Omega) = 0$, $\mathcal{C}$ est réunion de deux droites sécantes.

- Si $(s, t) = (1, 0)$, alors $F(x, y) = -l_1(x, y)^2 + l_2(x, y) + c$.

→ Si $l_1 = \lambda l_2$, l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2 + \lambda X + f = 0$ et $\mathcal{C}$ est soit vide, soit une droite, soit réunion de deux droites parallèles.

→ Sinon, l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2 = Y$ et c'est une parabole.

PROP 39. L'ellipse peut être paramétrisée par $x = A \cos(t), y = B \sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, l'hyperbole par $x = \pm A \cosh(t), y = B \sinh(t), t \in \mathbb{R}$. La parabole $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique $x = \frac{t^2}{2p}, y = t$.

II - Utilisation des groupes

1) Espaces affines, groupe affine [RAT] [LAD]

Soit E un ensemble non vide, E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

DEF 40. On dit que E est un $\mathbb{R}$ -espace affine de direction E lorsque E agit sur E de manière simplement transitive via $(x, \vec{x}) \mapsto x + \vec{x}$, $\forall (A, B) \in E^2, \exists! \vec{w} \in E, B = A + \vec{w}$.

DEF 41. $F \subset E$ est un sous-espace affine lorsque F s'écrit $F = A + F'$ avec $A \in F$ et F' sev de E .

PROP 42. F est un sous-espace affine de E si et seulement si l'ensemble $F' = \{ \vec{AM} / M \in F \}$ est un sev de E . Dans ce cas, $F = A + F'$.

DEF 43. Soient E, E' deux espaces affines de direction E, E' .

On dit que $f: E \rightarrow E'$ est une application affine lorsque l'ensemble $f': E \rightarrow E'$ linéaire telle que: $\forall (A, \vec{w}) \in E \times E, f(A + \vec{w}) = f(A) + f'(\vec{w})$.

Dans la suite, on suppose $\dim(E) < \infty$.

PROP 44: L'ensemble $GA(E)$ des bijections affines de E dans E est un groupe pour $\circ$ qui agit transitivement sur E .

THM 45: L'application $GA(E) \rightarrow GL(E)$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau le sous-groupe TE des translations.

Dans la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien.

DEF 66: On appelle isométrie affine toute application $f: E \rightarrow E$ qui conserve les distances: $\forall A, B \in E, d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ où $d(A, B) = \|AB\|$. On note $Is(E)$ leur ensemble.

THM 47: $Is(E) = \{ f \circ GA(E) / f \in O(E) \}$.

THM 48: Soit $f \in Is(E)$. Il existe un unique $u \in E$ et $g \in Is(E)$ à point fixe tel que $f = tu \circ g = g \circ tu$. De plus, $u \in \ker(f - Id)$.

RETH 49: Avec ce théorème et la classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3, on obtient celle des isométries affines en dimension 2 et 3 → voir ANNEXE.

2) Isométries conservant un polygone régulier (PROTH) (PER)

DEF 50: Soit $n \geq 2$. On dit qu'un groupe G est diédral de type D_n lorsqu'il est engendré par un élément ρ d'ordre n et un élément $\sigma \neq Id$ d'ordre 2 tel que $\rho\sigma\rho = Id$ (ρ est d'ordre 2).

THM 51: Si G est diédral de type D_n , alors:

$D_n = \langle Id, \rho, \dots, \rho^{n-1} \rangle \cup \{ \sigma, \rho\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma \}$, il est d'ordre $2n$. Deux groupes diédraux de type D_n sont isomorphes.

REM 52: D_n est le groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés. Il contient les n rotations $\rho^0, \dots, \rho^{n-1}$ et les n réflexions par rapport aux droites passant par O et les sommets ou les milieux des côtés du polygone.

3) Isométries conservant un polyèdre régulier (LAD)

DEF 53: On note $Is(P)$ l'ensemble des isométries laissant globalement invariant une partie P .

THM 54: $Is(tétraèdre)$ contient 24 éléments. C'est un groupe isomorphe à S_4 .

THM 55: $Is(cube)$ contient 48 éléments. C'est un groupe isomorphe à $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.

REM 56: $Is(cube) = Is(ocataèdre)$.

III - Utilisation des extensions de corps

1) Constructions géométriques à la règle et au compas [GOZ]

On reprend les notations de I-4.

DEF 57: Soit $X \in P, \#X \geq 2$. On dit que $\Pi \in P$ est constructible en un pas à partir de X lorsqu'il existe soit deux droites, soit deux cercles, soit une droite et un cercle dont Π est une intersection.

PROP 58: Si Π est constructible, son symétrique par rapport à X l'est aussi.

Si A et B sont constructibles, le milieu de $[A, B]$ l'est aussi.

Si A, B, C sont constructibles, la perpendiculaire et la parallèle à (AB) passant par C est constructible.

PROP 59: Soit $x \in \mathbb{R}, (x, 0)$ est constructible $\Leftrightarrow (q, x)$ l'est.

On dit alors que x est constructible.

PROP 60: Tout élément de $\mathbb{Q}$ est constructible.

PROP 61: $\Pi(x, y)$ est constructible $\Leftrightarrow x$ et y le sont.

THM 62: L'ensemble Π des réels constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

THM 63 (Wantzel): Soit $t \in \mathbb{R}, t$ est constructible si et seulement si il existe $L_0, \dots, L_p$ une suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que $L_0 = \mathbb{Q}, \forall i \in \{0, \dots, p-1\}, [L_{i+1}: L_i] = 2, t \in L_p$.

COR 64: Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est constructible, il est algébrique et: $f \in \mathbb{Q}[X], [Q(x): \mathbb{Q}] = 2^p$.

APPLI 65: La quadrature du cercle et la duplication du cube sont impossibles à la règle et au compas.

2) Construction du polygone régulier à n côtés [GOZ]

THM 66 (ADAMS): Soit $x \in \mathbb{R}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soit Π_x son polynôme minimal et $D(\Pi_x)$ son corps de décomposition. x est constructible $\Leftrightarrow [D(\Pi_x): \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2.

DEF 67: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que le polygone régulier à n côtés est constructible lorsque $e = \frac{2\pi i}{n}$ est constructible.

THM 68 (Gauss-Wantzel): Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On peut construire le polygone régulier à n côtés à la règle et au compas si et seulement si:

- soit il existe $\alpha \in \mathbb{N}, n = 2^\alpha$
- ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_k$ nombres premiers de Fermat distincts tels que $n = 2^\alpha p_1 \dots p_k$.

ANNEXE 1: Isométries affines

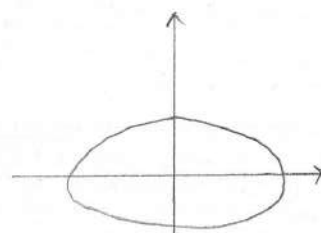
1/2) En dimension 2:

$\dim(\ker(f - \text{Id}_E))$	Isométrie affine f	$\det(f')$	Points fixes de f
0	rotation affine $\neq \text{Id}_E$ de centre A	1	Le point A
1	Réflexion glissée d'axe de vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$	-1	Aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$ O si $\vec{u} = \vec{0}$
2	Translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ (ou Id_E)	1	Aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$ E sinon

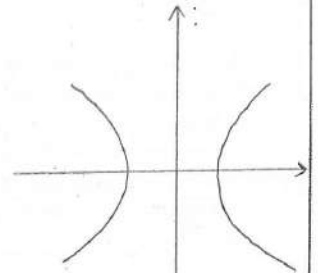
1/2) En dimension 3

$\dim(\ker(f - \text{Id}_E))$	Isométrie affine f	$\det(f')$	Points fixes de f
0	Ambrostation affine d'axe une droite D par rapport à un plan P orthogonal à D	-1	Le centre de l'ambrostation (point d'intersection entre D et P)
1	Vissage d'axe D de vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$, rotation affine	1	Aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$ O si $\vec{u} = \vec{0}$
2	Réflexion glissée par rapport à un plan P de vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$	-1	Aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$ P si $\vec{u} = \vec{0}$
3	Translation de vecteur $\vec{u}$ Id_E si $\vec{u} = \vec{0}$	1	Aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$ E sinon

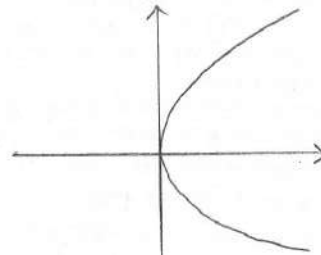
ANNEXE 2: Représentation des coniques



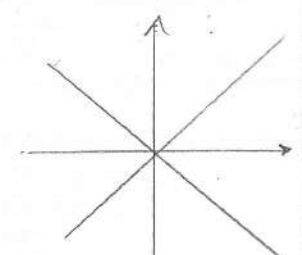
ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



parabole: $y^2 = 2px$ ($p > 0$)



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$