

Léon 161 : Espaces vectoriels et affines euclidiens

Distance et isométries

Références: Ladezgaillere, Rombaldi, Perrin

I - Distance dans un espace (affine) euclidien

1) Notion de distance

2) Projection et distance

a) Distance à un sous-espace vectoriel

b) Distance à un sous-espace affine

3) Matrice et déterminant de Gram

II - Structure des isométries d'un espace euclidien

1) Le groupe des isométries vectorielles

2) Le groupe des isométries affines

III - Réduction et classification des isométries

1) En dimension 2

2) En dimension 3

3) Réduction des isométries vectorielles généralisées

IV - Figures conservées par des isométries

1) Polygones réguliers

2) Le tétraèdre

3) Le cube

DEV 1: Déterminant de Gram

DEV 2: Théorème de Cartan-Dieudonné

Leçon 16: Espaces vectoriels et affines euclidiens: Distance et isométries.

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. On munit $\vec{E}$ d'une structure euclidienne. On note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$.

I - Distance dans un espace (affine) euclidien

1) Notion de distance

DEF 1: Soient $A, B \in E$. La distance associée de la norme euclidienne sur $\vec{E}$ est $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$

PROP 2: L'application $(A, B) \mapsto d(A, B)$ est une distance sur E .

EX 3: Dans $\mathbb{R}^3$, $d\left(\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}\right)\right) = \sqrt{3}$

DEF 4: Soit $A \in E$ et $F \subset E$. On définit la distance de A à F par $d(A, F) = \inf \{d(A, B) \mid B \in F\}$

On définit la distance entre deux parties F, G de E par: $d(F, G) = \inf \{d(A, B) \mid A \in F, B \in G\}$

EX 5: Soient F, G deux droites sécantes de E . Alors $d(F, G) = 0$.

2) Projection et distance

a) Distance à un sous-espace vectoriel [Hilb]

THM 6 (Projection sur un convexe fermé) Soit H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Soit $x \in H$.

Il y a $y \in C$, $\|x - y\| = d(x, C) = \inf \{\|x - z\| \mid z \in C\}$

On note $y = P_C(x)$ et on l'appelle projection de x sur C .
(THM 7. (Projection sur un sous-espace fermé) Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H . Alors P_F est linéaire, $\text{Im}(P_F) = F$, $\text{Ker}(P_F) = F^\perp$ et pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

COR 8: Si $\vec{E}$ est de dimension finie et F est un sous-espace de $\vec{E}$, si $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une base orthonormée de F . Alors $\forall \vec{x} \in \vec{E}$, $P_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \langle \vec{x} | \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$

EX 9: Si $\vec{D} = \text{Vect}(\vec{e})$ est une droite vectorielle de $\vec{E}$, on a $P_{\vec{D}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{e} \rangle}{\|\vec{e}\|^2} \vec{e}$ et $d(\vec{x}, \vec{D}) = \|\vec{x} - P_{\vec{D}}(\vec{x})\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} - P_{\vec{D}}(\vec{x}) \rangle} = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 - \frac{\langle \vec{x} | \vec{e} \rangle^2}{\|\vec{e}\|^2}}$

b) Distance à un sous-espace affine [LAD]

PROP 10: Soit F un sous-espace affine de direction $\vec{F}$ de E . On a $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^\perp$. Pour tout $M \in E$, l'unique sous-espace affine G_M passant par M de direction $\vec{F}^\perp$ coupe F en un unique point M' que l'on appelle projeté orthogonal sur F .

PROP 11: La projection orthogonale $P_F: M \mapsto M'$ est aussi la projection sur F de direction $\vec{F}^\perp$ c'est une application affine dont la partie linéaire est la projection orthogonale vectorielle sur $\vec{F}$.

THM 12: Le projeté orthogonal M' d'un point M sur un sous-espace affine F est l'unique point M' tel que $d(M, F) = \|M - M'\|$

3) Matrice et déterminant de Gram [GRI] + [GA2]

DEF 13: Soit $(v_1, \dots, v_p) \in (\vec{E})^p$. On appelle matrice de Gram associée à $(v_1, \dots, v_p)$ la matrice $(\langle v_i | v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$. Son déterminant est noté $G(v_1, \dots, v_p)$

PROP 14: $G(v_1, \dots, v_p) \geq 0$ et $G(v_1, \dots, v_p) \neq 0$ sset seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

DEV 1

PROP 15: Soit $(v_1, \dots, v_p)$ libre, $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Alors $\forall x \in E$, $d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, \dots, v_p)}{G(v_1, \dots, v_p)}$

COR 16: (Inégalité d'Hadamard) Soit $(v_1, \dots, v_m) \in E^m$

$G(v_1, \dots, v_m) \leq \prod_{i=1}^m \|v_i\|^2$

Si $\vec{E} = \mathbb{K}^m$, alors $|\det(v_1, \dots, v_m)| \leq \prod_{i=1}^m \|v_i\|$

On a égalité sset seulement si l'un des vecteurs est nul ou $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ est orthogonale.

APPLI 17: Dans $\mathbb{R}^3$, le volume du parallélépipède engendré par $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ est majoré par celui du pavé droit $\|u\| \|v\| \|w\|$

II - Structure des isométries d'un espace euclidien

1) Le groupe des isométries vectorielles [ROT] [REF]

PROP 18: Soit $u \in \mathcal{L}(\vec{E})$. Alors:

$\forall (x, y) \in \vec{E}^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle \iff \forall x \in \vec{E}, \|u(x)\| = \|x\|$

Dans ce cas, on dit que u est une isométrie.

THM 19: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une isométrie si et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée de E .

PROP 20: L'ensemble $O(E)$ des isométries est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal.

PROP 21: $u \in O(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est orthogonale i.e. ${}^tAA = A^tA = I_n$.

PROP 22: Soit $u \in O(E)$. Alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$. L'ensemble $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ est un groupe de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal. De plus, $SO(E) \triangleleft O(E)$.

THM 23: Soit $u \in O(E)$ et $\pi = \text{rg}(u - Id_E)$. Alors u est produit d'exactly π réflexions.

THM 24: Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements. Précisément, tout élément $u \in SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.

2) Groupe des isométries affines [LAD]

DEF 25: Soient E, F deux espaces affines euclidiens. Une application $f: E \rightarrow F$ est une isométrie lorsque pour tout $(M, N) \in E^2$, $d(M, N) = d(f(M), f(N))$. affine

THM 26: Les isométries $f: E \rightarrow F$ sont les applications affines dont la partie linéaire f est une isométrie vectorielle.

REM 27: Une isométrie affine f conserve les milieux.

DEF 28: On appelle déplacement (resp. antidéplacement) toute isométrie affine tel que $\det(f) = 1$ (resp. -1).

EX 29: La translation t_u est un déplacement sans point fixe de partie linéaire Id_E .

La symétrie orthogonale affine s_F par rapport à un sous-espace affine F a pour partie linéaire la symétrie vectorielle s_F .

PROP 30: L'ensemble $Is(E)$ des isométries affines de E est un groupe pour la composition. L'ensemble $Is^+(E)$ des déplacements est un sous-groupe de $Is(E)$.

DEF 31: On appelle rotation tout déplacement ayant au moins 1 point fixe.

THM 32: Une isométrie affine est entièrement déterminée par les images de $n+1$ points affinement indépendants.

THM 33: Toute isométrie affine de E est, de façon unique, le produit commutatif $f = t_u \circ g = g \circ t_u$ d'une isométrie g à point fixe et d'une translation t_u . Cette translation est alors parallèle au sous-espace affine des points fixes de g : $t_u \in \ker(f - Id_E) = \ker(g - Id_E)$.

Cette décomposition s'appelle la décomposition canonique de f .

III - Réduction et classification des isométries

1) En dimension 2. Toutes les isométries sont affines. $\dim(E) = 2$ [LAD]

THM 34: Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$.

• Si $M \in SO_n(\mathbb{R})$, il existe une base orthonormée (BON) de E et $\theta \in [0, \pi[$ tels que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (rotation d'angle θ)

• Si $M \notin SO_n(\mathbb{R})$, il existe une BON de E et $\theta \in [0, \pi[$ tels que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ (réflexion par rapport à l'axe Vect($\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})$)).

PROP 35: Une isométrie du plan est une réflexion si et seulement si son ensemble de points fixes est une droite.

PROP 36: Une isométrie plane est une rotation non triviale si et seulement si sa partie linéaire est une rotation vectorielle d'angle non nul si et seulement si elle a un unique point fixe.

DEF 37: Une symétrie glissée du plan est le produit commutatif d'une réflexion plane s_F par une translation de vecteur t_u non parallèle à l'axe de réflexion.

THM 38: Tout déplacement du plan affine euclidien est soit l'identité, soit une translation, soit une rotation. Tout antidéplacement du plan est soit une réflexion soit une symétrie glissée.

REM 39: On trouvera en annexe une classification des isométries en dimension 2.

[LAD]

2) En dimension 3 $\dim(E) = 3$, E est supposé orienté.

PROPO 40: Soit $u \in O(E)$, B une BON de E , et $M = \text{Mat}_B(u)$.

• Si $u \in SO(E)$, alors $M = I_3$ ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (rotation d'axe Vect(e_1) d'angle θ).

• Si $u \notin SO(E)$, $M = -I_3$ ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (réflexion) ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (antirotation d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$) produit de 3 réflexions.

DEF 41: On appelle visage tout déplacement de E qui est le produit commutatif d'une rotation d'axe Δ et d'angle non nul par une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \in \Delta$.

DEF 42: Une symétrie glissée de l'espace tout antidéplacement produit commutatif d'une réflexion de plan P par une translation de vecteur $\vec{u} \in P$, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

DEF 43: On appelle antirotation affine de centre O , d'axe Δ d'angle θ tout antidéplacement qui est produit commutatif d'une rotation d'axe Δ d'angle $\theta \neq 0$ et d'une réflexion selon le plan P orthogonal en O à Δ .

THM 44: Toute isométrie affine de E ayant au moins un point fixe est Id_E ou une réflexion, ou une rotation, ou une antirotation. Deux points fixes sont respectivement l'espace, un plan, une droite, un point.

THM 45: Tout déplacement de E est Id_E , une rotation, ou un visage, tout antidéplacement de E est une réflexion ou une symétrie glissée ou une antirotation.

3) Cas général des isométries vectorielles [ROR]

PROPO 46: Soit $u \in O(E)$. Soit F un sev de E stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

PROPO 47: Soit $u \in O(E)$. Alors u admet au moins une droite ou un plan stable.

THM 48: Soit $u \in O(E)$, $n \geq 2$. Il existe une BON de E telle que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} I_r & I_{p-q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $P_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$.

IV - Parties conservées par des isométries

1) Polygones réguliers

DEF 50: Un polygone régulier $A_0 A_1 \dots A_{m-1}$ à m sommets est de telle sorte que les sommets sont situés sur un cercle de centre O et vérifient $(OA_0, OA_k) = \frac{2k\pi}{m} \pmod{2\pi}$.

PROPO 51: L'image de P_m de centre O par $f \in \text{Is}(E)$ est le polygone régulier $f(A_0) f(A_1) \dots f(A_{m-1})$ de centre $f(O)$. On le note $f(P_m)$. On dit que f conserve P_m lorsque les ensembles $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ et $\{f(A_0), \dots, f(A_{m-1})\}$ sont égaux.

PROPO 52: L'ensemble $\text{Is}(P_m)$ des isométries conservant P_m est un groupe. On a $\text{Is}^+(P_m) = \{I_d, r, r^2, \dots, r^{m-1}\}$, $\text{Is}^-(P_m) = \{s, r \circ s, \dots, r^{m-1} \circ s\}$ où r est la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{m}$ et s est la réflexion d'axe (OA_0) .

2) Le tétraèdre [LAD]

THM 53: Le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier $ABCD$ comprend 24 éléments. Les 12 rotations sont l'identité, les huit rotations autour des quatre hauteurs d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$, les trois retournements autour des bissectrices. Les 12 antidéplacements sont les six réflexions selon les plans médiateurs d'arêtes et les six antirotations de centre O , d'axes les trois bissectrices et d'angles $\pm \frac{\pi}{2}$. Le groupe est isomorphe à S_4 .

3) Le cube

THM 54: Le groupe des isométries d'un cube comprend 48 éléments.

$$G \cong G_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad G^+ \cong G_4$$

ANNEXE 1: Isométries affines du plan

On écrit $f = \vec{u} \circ g$ avec g à point fixe, B une base de $\vec{E}$

$\text{Mat}_B(f)$	$\vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \neq \vec{0}$
I_2 $-I_2$ R_θ	Id_E symétrie centrale rotation	Translation
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	symétrie axiale	symétrie glissée

ANNEXE 2: Isométries affines en dimension 3

On écrit $f = \vec{u} \circ g$ avec g à point fixe, B une base de $\vec{E}$

$\text{Mat}_B(f)$	$\vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \neq \vec{0}$
I_3	Id_E	
$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Retournement	vissage
$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$	Rotation	vissage
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Reflexion	symétrie glissée
$-I_3$	Symétrie centrale	
$R_{\theta'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$	Antirotation	