

Leçon 151: Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Références: Manuy, Gourdon, Beck, Rombaldi

I - Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Notion d'endomorphisme induit
- 3) Dualité et sous-espaces stables

II - Application à la réduction des endomorphismes

- 1) Lemme des noyaux
- 2) Diagonalisation
- 3) Trigonalisation

III - Endomorphismes remarquables

- 1) Endomorphismes cycliques
- 2) Endomorphismes normaux
- 3) Endomorphismes semi-simples

DEV 1: Réduction des endo normaux

DEV 2: Endo semi-simples

Leçon 15: Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie - Applications.

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note M_u son polynôme minimal et χ_u son polynôme caractéristique.

I - Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

1) Définitions et premières propriétés (HAN) [BEC]

DEF 1: Soit F un sev de E . On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subset F$.

EX 2: Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u de même pour $\mathcal{P}(u)$.

EX 3: Une homothétie stabilise tout sous-espace.

PROP 4: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, F un sev stable par u et v . Alors, F est stable par $u \circ v$ et $v \circ u$.

PROP 5: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u . Alors $u(F)$ est stable par v ou v^{-1} .

PROP 6: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Alors $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v (et réciproquement).

REM 7: L'intérêt des sous-espaces stables est qu'ils permettent d'obtenir une première description plus simple de $u \in \mathcal{L}(E)$: si l'on dispose d'une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u , alors l'étude de u est équivalente à l'étude des endomorphismes induits par u sur chacun des sous-espaces.

2) Notion d'endomorphisme induit (HAN) [BEC]

DEF 8: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u . L'endomorphisme induit par u sur F est l'endomorphisme $u|_F$ de F définie par $u|_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.

PROP 9: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u . Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Alors

$\text{Mat}_B(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est de taille $\dim(F)$.

COR 10: Dans une base associée à une décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ en somme directe de sous-espaces stables par u , la matrice de u est diagonale par blocs:

$$\begin{pmatrix} \text{Mat}(u|_{F_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \text{Mat}(u|_{F_p}) \end{pmatrix}$$

PROP 11: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u . Alors, $M_{u|_F} | M_u$ et $\chi_{u|_F} | \chi_u$.

EX 12: Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Un sous-espace est stable par p si et seulement si il est la somme directe d'un sous-espace de $\text{Im}(p)$ et d'un sous-espace de $\ker(p)$.

EX 13: Les sous-espaces stables par une symétrie vectorielle s sont obtenus comme somme directe d'un sous-espace de $\ker(s - \text{Id}_E)$ et d'un sous-espace de $\ker(s + \text{Id}_E)$.

PROP 14: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G deux sous-espaces stables par u . Alors $\mu_u = \text{ppcm}(\mu_{u|_F}, \mu_{u|_G})$.

3) Dualité et sous-espaces stables (GOU)

DEF 15: Des éléments $x \in E$ et $y \in E^*$ sont dits orthogonaux lorsque $\varphi(x) = 0$. Si $A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{y \in E^* / \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$. C'est un sev de E^* appelé orthogonal de A . Si $B \subseteq E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E / \forall y \in B, \varphi(x) = 0\}$.

THM 16: Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ telles que $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Alors $\bigcap \ker(\varphi_i)$ est de dimension $n - r$. Réciproquement, si F est un sev de E de dimension q , il existe $n - q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \bigcap \ker(\varphi_i)$.

DEF 17: Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ & application $t_u: F^* \rightarrow E^*$ est appelée application transposée de u .

PROP 18: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par t_u .

REM 19: Cette proposition est utile pour déterminer les sev stables de dimension 1 et 2. On cherche les vecteurs propres de A et tA .

II - Application à la réduction des endomorphismes

1) Lemme des noyaux [R01]

LEMME 20: Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, $P_1, \dots, P_p$ des polynômes non nuls de $K[X]$ et $Q_1, \dots, Q_p$ les polynômes définies par $Q_k = \prod_{j \neq k} P_j$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Si les P_k sont deux à deux premiers entre eux dans $K[X]$, alors les Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $P_k \wedge Q_k = 1$.

THM 21: Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, $P_1, \dots, P_p$ des polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{k=1}^p P_k$. On a $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u))$.

THM 22: (Cayley - Hamilton) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

REM 23: Cayley - Hamilton et le lemme des noyaux permettent de décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u : si $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i}$.

2) Diagonalisation [MAN]

DEF 24: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base B de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ soit diagonale.

THM 25: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- 1) u est diagonalisable
- 2) Il existe une base B de E formée de vecteurs propres
- 3) E est somme directe des sous-espaces propres de u
- 4) La dimension de chaque sous-espace propre de u est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre en tant que racine de χ_u .
- 5) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples
- 6) u est scindé à racines simples

PROP 26: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sev de E stable par u . Alors $u|_F$ est diagonalisable.

EX 27: Les projecteurs et symétries vectorielles non triviales sont diagonalisables. Le seul endomorphisme nilpotent diagonalisable est l'endomorphisme nul.

DEF 28: Une famille finie d'endomorphismes est dite co-diagonalisable lorsqu'il existe une base B formée de vecteurs propres communs à tous les endomorphismes.

PROP 29: Soit $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E . Ils sont co-diagonalisables si et seulement si ils sont diagonalisables et commutent deux à deux.

3) Trigonalisation [MAN] [Gra]

DEF 30: Un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base B de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ est triangulaire supérieure.

THM 31: $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé et si et seulement si $u|_F$ est scindé.

COR 32: Tout endomorphisme nilpotent admet dans une base adaptée une matrice triangulaire supérieure.

COR 33: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et F un sev stable par u . Alors $u|_F$ est trigonalisable.

COR 34: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Alors, $\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et $\det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ où $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

DEF 35: Une famille d'endomorphismes $(u_1, \dots, u_p)$ de E est co-trigonalisable lorsqu'il existe une base B de E dans laquelle chaque endomorphisme est représenté par une matrice triangulaire supérieure.

PROP 36: Soit $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes trigonalisables de E tels que $u_i \circ u_j$ et $u_j \circ u_i$ commutent pour tout i et j dans $\{1, \dots, p\}$. Alors $(u_1, \dots, u_p)$ est co-trigonalisable.

PROP 37: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u . Soit $P = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note $N_i = \ker(P_i^{n_i}(u))$. On a alors $E = \bigoplus_{i=1}^r N_i$ et pour tout i , la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u .

THM 38: (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K . Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que:

- (1) d est diagonalisable, n est nilpotente
- (2) $u = d + n$ et $\text{dom} = m \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u .

EX 39: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford.

APPLI 40: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que χ_A est scindé sur K . A est diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable.

III - Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes cycliques (MAN)

DEF 41: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le sous-espace cyclique de u associé à x est le plus petit sous-espace stable par u contenant x . On le note $E_{u,x}$.

PROP 42: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Alors $E_{u,x} = \text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.

NOT 43: On note $I_{u,x} = \{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ et $T_{u,x}$ son générateur unitaire c-à-d le polynôme monôme local de u en x .

DEF 44: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E = E_{u,x}$.

EX 45: Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique.

PROP 46: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Alors $\deg(\mu_u) = \dim(E)$.

PROP 47: Si $\deg(\mu_u) = \dim(E)$, alors u est cyclique.

LEMME 48: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u|_{E_{u,x}}}$. De plus, le sous-espace $E_{u,x}$ admet un supplémentaire stable par u .

DEF 49: La matrice compagnon de $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{pmatrix}$

PROP 50: u est cyclique si et seulement si il existe une base de E dans laquelle sa matrice est compagnon.

2) Endomorphismes normaux (RAB)

DEF 51: Un endomorphisme est dit normal lorsqu'il commute avec son adjoint.

LEMME 52: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un sev stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

DEV 1

LEMME 53: Si $\dim(E) = 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ normal sans valeur propre réelle. Alors, pour toute base orthonormée B de E , $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

THM 54: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base orthonormée B de E telle que

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} P & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_n \end{pmatrix} \text{ où } P \text{ est diagonale de taille } n \text{ et } R_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ } a_n \neq 0.$$

3) Endomorphismes semi-simples (GOU)

DEF 55: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple lorsque pour tout sev F stable par u , il existe un supplémentaire $F^\perp$ stable par u .

DEV 2

PROP 56: Si π_u est irréductible, alors u est semi-simple.

THM 57: u est semi-simple si et seulement si π_u est sans facteur carré.

LEM 58: Si K est algébriquement clos, u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.

THM 59: Si M est semi-simple, alors M est semblable dans $\mathcal{M}_n(K)$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.