$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités sur les suites numériques [1] [4]

1 - Limite d'une suite

Déf 1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite *convergente* s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \mid u_n - l \mid \leq \epsilon.$$

On appelle l la *limite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

NB 2.
- Une suite qui ne converge pas est dite *divergente.*
- Si cette limite existe, elle est unique.

Ex 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$. Si $\mid q \mid > 1$, (u_n) diverge et si $\mid q \mid < 1$, (u_n) converge vers 0.

Théo 4 (Cesaro)**.** *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la suite $(\frac{u_1+\ldots+u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et possède la même limite.*

Déf 5. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un entier $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq A$.
On définit, de même $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Prop 6. *Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $a \in \mathbb{K}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$*

2 - Particularités des suites réelles

Théo 7. *Une suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.*

Théo 8. *Une suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Théo 9. *Si trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$$

et si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Déf 10. Deux suites réelles sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0.$$

Prop 11. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Ex 12 (Suites arithmético-géométriques)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant $0 < v_0 < u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Alors (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

3 - Suites de Cauchy

Déf 13. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite *de Cauchy* si pour tout ϵ>0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $m \geq N$, on ait $\mid u_n - u_m \mid \leq \epsilon$.

Théo 14. *Une suite réelle est convergente si et seulement elle est de Cauchy.*

NB 15.
- Soit E un espace métrique. Toute suite convergente de E est de Cauchy.
- Un espace métrique E est dit *complet* si toute suite de Cauchy de E converge.

App 16 (Théorème du point fixe)**.** Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \longrightarrow E$ telle que

$$\exists k \in]0, 1[, \forall (x, y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Alors f admet un unique point fixe.

II - Valeurs d'adhérence [4][5][6]

1 - Définitions

Déf 17. On appelle *sous-suite* de (u_n) toute suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ avec ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

NB 18. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute sous-suite converge et a la même limite.

Ex 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} = -1$ et $u_{2k} = 1$ sont des sous-suites de (u_n).

Prop 20. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $l \in \mathbb{K}$. On a alors (u_n) converge vers l si et seulement si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers l.*

Déf 21. On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ tout élément de $\mathbb{K}$ limite d'une sous-suite convergente de (u_n).

Ex 22. En reprenant l'exemple 19, on obtient que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop 23. *L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est égal à $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{A}_p$ avec $A_p = \{u_k, k \geq p\}$. En particulier, c'est un fermé.*

Théo 24 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Déf 25. Soit E un espace métrique. On dit que X est une *partie compacte* de E si toute suite d'éléments de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X.

Ex 26. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E, $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Ex 27. Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties fermées bornées de $\mathbb{R}$.

2 - Limite supérieure, limite inférieure

Déf 28. La *limite supérieure* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est définie par
$L = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup_{p\geq n} u_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$.
De même, la *limite inférieure* de cette suite est définie par
$l = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf_{p\geq n} u_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$.

NB 29.
- L et l appartiennent à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$
- L (resp. l) est la plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence de (u_n).

Prop 30. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Alors (u_n) converge vers $u \in \bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si $l = L = u$.*

App 31 (Suites sous-additives)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $u_{n+p} \leq u_n + u_p$ pour $n, p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_n}{n}$ tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^+$.

III - Applications

1 - Critère de Weyl [3]

Déf 32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$ et $a, b \in [0,1]$ avec $a \leq b$. La suite (u_n) est *équirépartie* si et seulement si, pour tout a, b, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Card\{k \in \{1, ..., n\}, u_k \in [a,b]\}}{n} = b - a.$$

Prop 33. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie alors $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans [0,1].*

Théo 34 (Développement 1)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de [0,1] et $a, b \in [0,1]$ avec $a \leq b$. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) (u_n) est équirépartie.

(ii) Pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$$

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$$

NB 35. On aura besoin du théorème de Weierstrass trigonométrique pour la démonstration.
Toute fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques

Ex 36. Soit $\theta > 0$. La suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

2 - Méthode de Newton [2][7]

Théo 37. *Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = F(x_n) \text{ avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de la fonction f, on a :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique et il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

$$\mid x_{n+1} - a \mid \leq C \mid x_n - a \mid^2$$

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [a,d], f''(x) > 0$ alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a. \end{cases}$$

Ex 38. On peut approcher le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en considérant la fonction $f(x) = x^2 - x - 1$ sur [1,2].

3 - Séries [1] [4]

Déf 39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *série* de terme général u_n la suite $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + ... + u_n.$$

Déf 40. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mid u_n \mid$ converge.

Théo 41. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Déf 42. Une série *alternée* est une série réelle $\sum u_n$ dont les termes changent alternativement de signes.

Théo 43 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge et les restes*

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ vérifient } \mid R_n \mid \leq a_{n+1}.$$

Références

[1] J. Combes. *Suites et séries*. PUF, 1982.

[2] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[3] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 2*. Cassini, 2004.

[4] X. Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[5] J.-M. Monier. *Analyse MP*. Dunod, 2007.

[6] H. Queffélec and C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[7] F. Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2003.