

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé.

I – Indépendance en probabilités

1. Indépendance d'événements

DÉFINITION 1

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** (sous $\mathbb{P}$) si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

[G-K]
p. 52

DÉFINITION 2

On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall J \subseteq I, J \text{ fini}, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

PROPOSITION 3

Soient A, B deux événements. Alors,

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

[DAN]
p. 425

PROPOSITION 4

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_1^c, \dots, A_k^c, A_{k+1}, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

EXEMPLE 5

On considère deux gènes a et b tels que la redondance de l'un d'entre eux entraîne l'acquisition d'un caractère $\mathcal{C}$. Anselme et Colette possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : ils lui transmettront chacun, indépendamment, soit le gène a , soit le gène b , avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. On considère les événements :

- A : Colette transmet le gène a .
- B : Anselme transmet le gène b .
- C : l'enfant présente le caractère $\mathcal{C}$.

A, B et C sont indépendants deux à deux, mais non mutuellement indépendants.

APPLICATION 6**Indicatrice d'Euler.**

On note φ l'indicatrice d'Euler. Alors,

$$\forall n \geq 2, \varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

2. Indépendance de tribus**DÉFINITION 7**

On dit que deux sous-tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{A}$ sont **indépendantes** (sous $\mathbb{P}$) si

$$\forall A \in \mathcal{A}_1, \forall B \in \mathcal{A}_2, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

[G-K]
p. 52

DÉFINITION 8

On dit qu'une famille de sous-tribus $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{A}$ est **indépendante** (sous $\mathbb{P}$) si

$$\forall J \subseteq I, J \text{ fini}, \forall (A_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

REMARQUE 9

- Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, A est indépendante de B si et seulement si $\sigma(A)$ est indépendante de $\sigma(B)$.
- Si deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes, toute sous-tribu de $\mathcal{A}$ est indépendante de toute sous-tribu de $\mathcal{B}$.

3. Indépendance de variables aléatoires**a. Variables aléatoires indépendantes****DÉFINITION 10**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Cette famille est la **tribu engendrée** par X .

p. 125

DÉFINITION 11

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes.

EXEMPLE 12

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

PROPOSITION 13

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions mesurables f et g .

PROPOSITION 14

Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants. On suppose que X admet une densité f et Y admet une densité g . Alors, (X, Y) admet comme densité $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$.

p. 136

PROPOSITION 15

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et intégrables. Alors,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

p. 175

b. Variables aléatoires non corrélées**DÉFINITION 16**

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **non corrélées** si

$$\text{Covar}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = 0$$

p. 174

PROPOSITION 17

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes intégrables. Alors X et Y ne sont pas corrélées.

CONTRE-EXEMPLE 18

La réciproque est fausse. Ainsi, soient X et Y deux variables aléatoires vérifiant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) &= \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = -1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

alors, X et Y sont non corrélées mais pas indépendantes.

II – Étude de variables aléatoires indépendantes

1. Critères d'indépendance

THÉORÈME 19

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

p. 128

COROLLAIRE 20

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors, $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

PROPOSITION 21

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que (X, Y) admet une densité $h : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ à variables séparées. Alors, X et Y sont indépendantes. De plus, X et Y admettent respectivement pour densité

$$x \mapsto \frac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}} f(t) dt} \text{ et } y \mapsto \frac{g(y)}{\int_{\mathbb{R}} g(t) dt}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

p. 136

2. Sommes de variables aléatoires indépendantes

THÉORÈME 22

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g . Alors, $X + Y$ admet comme densité la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

p. 179

APPLICATION 23

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$.

APPLICATION 24

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} d\theta$$

où Γ désigne la fonction Γ d'Euler.

DÉFINITION 25

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice** de X la fonction

$$G_X : \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k \end{array}$$

p. 235

PROPOSITION 26

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. Alors,

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

THÉORÈME 27

Sur $[0, 1[$, la fonction G_X est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n})$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

ce qui montre que la fonction génératrice caractérise la loi.

EXEMPLE 28

Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

EXEMPLE 29

Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(m, p)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

[GOU21]
p. 346

DÉFINITION 30

On appelle **fonction caractéristique** de X la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})$$

[G-K]
p. 239

THÉORÈME 31

Si deux variables (ou vecteurs) aléatoires ont la même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

PROPOSITION 32

Si deux variables aléatoires réelles sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

III – Indépendance et théorèmes limites

1. Lemmes de Borel-Cantelli

THÉORÈME 33

1^{er} lemme de Borel-Cantelli.

Soit (A_n) une suite d'événements. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$$

p. 272

REMARQUE 34

Cela signifie que presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

COROLLAIRE 35

Si $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ converge pour tout $\epsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.

EXEMPLE 36

Si (X_n) est telle que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, alors la suite (S_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est constante à partir d'un certain rang.

p. 285

THÉORÈME 37

2^e lemme de Borel-Cantelli.

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1$$

p. 273

REMARQUE 38

Cela signifie que presque sûrement, un nombre infini d'événements A_n se réalisent.

EXEMPLE 39

On fait une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Alors, la probabilité de l'événement "on obtient une infinité de fois deux "Face" consécutifs" est 1.

p. 286

COROLLAIRE 40

Loi du 0-1 de Borel.

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0 \text{ ou } 1$$

et elle vaut 1 si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

2. Loïs des grands nombres

THÉORÈME 41

Loi faible des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et intégrables. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors,

$$M_n \xrightarrow{(p)} \mathbb{E}(X_1)$$

p. 270

THÉORÈME 42

Loi forte des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors,

$$X_1 \in \mathcal{L}_1 \iff M_n \xrightarrow{(ps.)} \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on a $\ell = \mathbb{E}(X_1)$.

[Z-Q]
p. 532

APPLICATION 43

Théorème de Bernstein.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le n -ième polynôme de Bernstein associé à f . Alors la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f .

[G-K]
p. 195

COROLLAIRE 44

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

DEV

3. Théorème central limite

THÉORÈME 45

Théorème de Lévy.

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[Z-Q]
p. 544

THÉORÈME 46

Central limite.

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$. Alors,

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]
p. 307

APPLICATION 47

Théorème de Moivre-Laplace.

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

APPLICATION 48

Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

p. 556

APPLICATION 49

Théorème des événements rares de Poisson.

Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On considère des événements $A_{n,1}, \dots, A_{n,N_n}$ indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,k}) = p_{n,k}$. On suppose également que :

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lambda > 0$ où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \llbracket 1, N_n \rrbracket} p_{n,k} = 0$.

Alors, la suite de variables aléatoires (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

p. 390

DEV

Annexes

Loi	Somme (indépendantes de même loi)
de Bernoulli	$\sum_{k=1}^n \mathcal{B}(p) \sim \mathcal{B}(n, p)$
Binomiale	$\sum_{k=1}^n \mathcal{B}(n_k, p) \sim \mathcal{B}(\sum_{k=1}^n n_k, p)$
de Poisson	$\sum_{k=1}^n \mathcal{P}(\lambda_k) \sim \mathcal{P}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$

[G-K]
p. 137

p. 236

FIGURE 1 : Sommes de variables aléatoires à lois discrètes.

Loi	Somme (indépendantes de même loi)
Normale	$\sum_{k=1}^n \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2) \sim \mathcal{N}(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2)$
Exponentielle	$\sum_{k=1}^n \mathcal{E}(\lambda) \sim \mathcal{E}(n\lambda)$
Gamma	$\sum_{k=1}^n \Gamma(a_k, \gamma) \sim \Gamma(\sum_{k=1}^n a_k, \gamma)$

p. 142

p. 247

p. 178

FIGURE 2 : Sommes de variables aléatoires à densité.

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.