

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

I – Premiers modes de convergence

1. Convergence presque sûre

DÉFINITION 1

On dit que (X_n) converge presque sûrement vers $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega)\}) = 1$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.

[G-K]
p. 265

REMARQUE 2

La convergence presque sûre d'une suite de vecteurs aléatoires équivaut à la convergence presque sûre de chacune des composantes. Pour cette raison, on peut se limiter à l'étude du cas $d = 1$.

EXEMPLE 3

Si (X_n) est telle que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{(ps.)} \frac{1}{2}$.

p. 285

PROPOSITION 4

Si $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(ps.)} Y$, alors :

- (i) $\forall a \in \mathbb{R}, aX_n \xrightarrow{(ps.)} aX$.
- (ii) $X_n + Y_n \xrightarrow{(ps.)} X + Y$.
- (iii) $X_n Y_n \xrightarrow{(ps.)} XY$.

Plus généralement, si $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ et X sont à valeurs dans E , alors $f(X_n) \xrightarrow{(ps.)} f(X)$ pour toute f fonction définie et continue sur E .

p. 265

THÉORÈME 5

1^{er} lemme de Borel-Cantelli.

Soit (A_n) une suite d'événements. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$$

p. 272

REMARQUE 6

Cela signifie que presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

COROLLAIRE 7

Si $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ converge pour tout $\epsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.

EXEMPLE 8

Si (X_n) est telle que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, alors la suite (S_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est constante à partir d'un certain rang.

p. 285

THÉORÈME 9

2^e lemme de Borel-Cantelli.

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1$$

p. 273

REMARQUE 10

Cela signifie que presque sûrement, un nombre infini d'événements A_n se réalisent.

EXEMPLE 11

On fait une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Alors, la probabilité de l'événement "on obtient une infinité de fois deux "Face" consécutifs" est 1.

p. 286

COROLLAIRE 12

Loi du 0-1 de Borel.

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0 \text{ ou } 1$$

et elle vaut 1 si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

2. Convergence en probabilité

DÉFINITION 13

On dit que (X_n) **converge en probabilité** vers $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(p)} X$.

p. 268

EXEMPLE 14

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. On définit la suite (Y_n) par

$$\forall n \geq 1, Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n = X_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la suite (M_n) par $\forall n \geq 1, M_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$. On a $M_n - 2p(1 - p) \xrightarrow{(p)} 0$.

p. 285

PROPOSITION 15

Si $X_n \xrightarrow{(p)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(p)} Y$, alors :

(i) $(X_n, Y_n) \xrightarrow{(p)} (X, Y)$.

(ii) $X_n + Y_n \xrightarrow{(p)} X + Y$.

p. 268

THÉORÈME 16

La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

CONTRE-EXEMPLE 17

La suite $(M_n - 2p(1 - p))$ de l'Exemple 14 ne converge pas vers 0 presque sûrement.

p. 285

THÉORÈME 18

Si $X_n \xrightarrow{(p)} X$, alors il existe une sous-suite (X_{n_k}) de (X_n) telle que $X_{n_k} \xrightarrow{(ps.)} X$.

p. 274

COROLLAIRE 19

On suppose $X_n \xrightarrow{(p)} X$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans E , alors $f(X_n) \xrightarrow{(p)} f(X)$ pour toute f fonction définie et continue sur E .

3. Lois des grands nombres

THÉORÈME 20

Loi faible des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et intégrables. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors,

$$M_n \xrightarrow{(p)} \mathbb{E}(X_1)$$

p. 270

THÉORÈME 21

Loi forte des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors,

$$X_1 \in \mathcal{L}_1 \iff M_n \xrightarrow{(ps.)} \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on a $\ell = \mathbb{E}(X_1)$.

[Z-Q]
p. 532

APPLICATION 22

Théorème de Bernstein.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le n -ième polynôme de Bernstein associé à f . Alors la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f .

[G-K]
p. 195

COROLLAIRE 23

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

II – Convergence L_p

DÉFINITION 24

On dit que (X_n) **converge dans** L_p vers $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in L_p, X \in L_p \text{ et } \mathbb{E}(\|X_n - X\|^p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(L_p)} X$.

p. 268

PROPOSITION 25

Comme les espaces sont de mesure finie,

$$p \geq q \implies L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

[D-L]
p. 510

COROLLAIRE 26

Pour $1 \leq p \leq q$, la convergence dans L_q implique la convergence dans L_p qui implique elle-même la convergence dans L_1 .

CONTRE-EXEMPLE 27

Si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) = \sqrt{n} \mathbb{1}_{\left]0, \frac{1}{n}\right]}$$

alors, (X_n) converge dans L_1 mais pas dans L_2 .

[HAU]
p. 365

THÉORÈME 28

Convergence dominée.

Si $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$ et $\exists g \in L_1$ telle que $\|X_n\|_1 \leq g$ pp. pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$.

[G-K]
p. 65

CONTRE-EXEMPLE 29

On se place dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[), \lambda_{[0, 1[})$. Si $\forall n \geq 1, X_n = n \mathbb{1}_{\left]0, \frac{1}{n}\right]}$, alors (X_n) converge vers 0 presque sûrement, mais pas dans L_1 .

[HAU]
p. 365

PROPOSITION 30

Si $X_n \xrightarrow{(L_p)} X$, alors il existe une sous-suite (X_{n_k}) de (X_n) telle que $X_{n_k} \xrightarrow{(ps.)} X$.

[G-K]
p. 265

THÉORÈME 31

La convergence dans L_p (pour $p \geq 1$) implique la convergence en probabilité.

EXEMPLE 32

La convergence en probabilité de l'Exemple 14 est en fait une convergence dans L_2 .

CONTRE-EXEMPLE 33

p. 281

Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. On pose $\forall n \geq 1, Y_n = X \mathbb{1}_{[0,n]}(X) + e^{2n} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(X)$. Alors (Y_n) converge vers X en probabilité, mais pas dans L_1 .

III – Convergence en loi

1. Définition et premières propriétés

DÉFINITION 34

p. 295

On dit que (X_n) **converge en loi** vers $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X))$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

EXEMPLE 35

p. 313

Si, pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

PROPOSITION 36

p. 295

Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$, alors :

(i) La limite X est unique.

(ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, Y \rangle$.

Plus généralement, si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans E , alors $f(X_n) \xrightarrow{(d)} f(X)$ pour toute f fonction définie et continue sur E .

THÉORÈME 37**Lemme de Scheffé.**

On suppose :

- $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}$.

Alors, $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$.

COROLLAIRE 38

On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une densité f_n .
- (f_n) converge presque partout vers une fonction f .
- Il existe une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Alors, $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

COROLLAIRE 39

Si X et X_n sont des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable D pour tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant

$$\forall k \in D, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

APPLICATION 40

Soit, pour $n \geq 1$, une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p_n . On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

THÉORÈME 41

En notant F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , on a,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff F_{X_n}(x) \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} F_X(x)$$

en tout point x où F_X est continue.

THÉORÈME 42

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire.

- (i) Si (X_n) converge en probabilité vers X , alors (X_n) converge en loi vers X .
- (ii) Si (X_n) converge en loi vers une constante a (ou de manière équivalente, vers une masse de Dirac δ_a), alors (X_n) converge en probabilité vers a .

CONTRE-EXEMPLE 43

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$, alors (X_n) converge en loi vers $\mathcal{B}(2p(1-p))$, mais pas en probabilité.

[HAU]
p. 362

2. Théorème central limite et applications

THÉORÈME 44

Théorème de Slutsky.

Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} c$ où c est un vecteur constant, alors :

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c.$

(ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, c \rangle.$

[G-K]
p. 305

NOTATION 45

Si X est une variable aléatoire réelle, on note ϕ_X sa fonction caractéristique.

THÉORÈME 46

Théorème de Lévy.

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[Z-Q]
p. 544

DEV

THÉORÈME 47

Central limite.

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$. Alors,

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]
p. 307

APPLICATION 48

Théorème de Moivre-Laplace.

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

LEMME 49

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$.

p. 180

APPLICATION 50**Formule de Stirling.**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 556

DEV**APPLICATION 51****Théorème des événements rares de Poisson.**

Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On considère des événements $A_{n,1}, \dots, A_{n,N_n}$ indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,k}) = p_{n,k}$. On suppose également que :

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lambda > 0$ où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \llbracket 1, N_n \rrbracket} p_{n,k} = 0$.

Alors, la suite de variables aléatoires (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

p. 390

Annexes

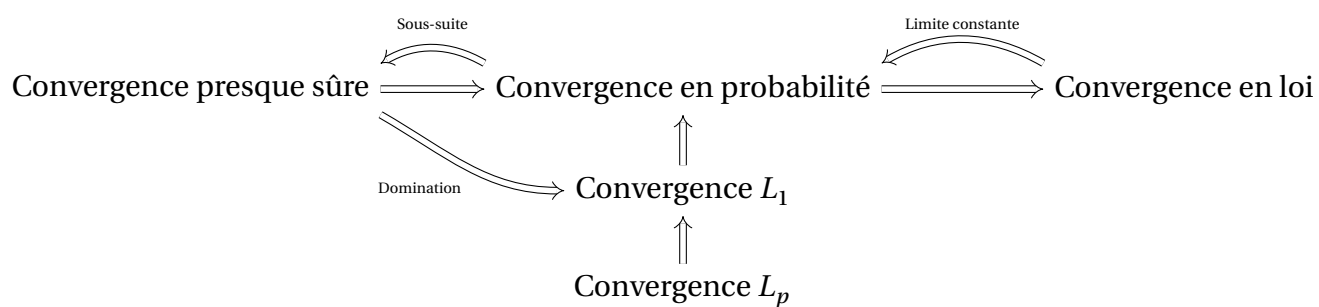


FIGURE 1 : Liens entre les différents modes de convergence.

Bibliographie

Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les Contre-Exemples en Mathématiques

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2^e éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.