

250 Transformation de Fourier. Applications.

I – Transformation de Fourier dans $L_1(\mathbb{R}^d)$

1. Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 1

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée $\widehat{f}$ par

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{array}$$

[AMR08]
p. 109

EXEMPLE 2

Densité de Poisson.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Alors $p \in L_1(\mathbb{R})$ et, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

EXEMPLE 3

Transformée de Fourier d'une gaussienne.

On définit $\forall a \in \mathbb{R}_*$,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

p. 156

LEMME 4

Lemme de Riemann-Lebesgue.

Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ existe et

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

p. 109

REMARQUE 5

La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas forcément intégrable.

THÉORÈME 6

$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$. Donc la **transformation de Fourier**

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

COROLLAIRE 7

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

PROPOSITION 8

Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

(i) $\mathcal{F}(x \mapsto f(-x)) = \xi \mapsto \mathcal{F}(f)(-\xi).$

(ii) $\mathcal{F}(\bar{f}) = \xi \mapsto \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}.$

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*$, et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}(x \mapsto f(\lambda x)) = \frac{1}{|\lambda|^d} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}(x \mapsto f(x - a))(\xi) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \text{ et } \mathcal{F}(x \mapsto e^{i\langle a, x \rangle} f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

PROPOSITION 9

Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ et soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

(i) On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

(ii) On suppose $(\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto y_j f(\xi_1, \dots, \xi_d) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors, la j -ième dérivée partielle de $\hat{f}$ existe, et

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -i\widehat{\xi_j f}(\xi)$$

APPLICATION 10

On considère $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ pour $\alpha > 0$. Alors, f vérifie

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \hat{f}(\xi)$$

ce qui permet de retrouver l'Exemple 3.

p. 120

[GOU20]
p. 169

2. Convolution

DÉFINITION 11

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de f et g en $x \in \mathbb{R}^d$ **existe** si la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

[AMR08]
p. 75

EXEMPLE 12

Soient $a < b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PROPOSITION 13

Dans $L_1(\mathbb{R}^d)$, dès qu'il a un sens, le produit de convolution de deux fonctions est commutatif, bilinéaire et associatif.

THÉORÈME 14

Convolution dans $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Soient $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

- (i) pp. en $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
- (ii) $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
- (iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
- (iv) L'espace vectoriel normé $(L_1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ muni de $*$ est une algèbre de Banach commutative.

PROPOSITION 15

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

ie. $\mathcal{F} : (L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), +, \times, \cdot)$ est un morphisme d'algèbres.

p. 114

COROLLAIRE 16

L'algèbre $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$ n'a pas d'élément unité.

APPLICATION 17

$$f * f = f \iff f = 0$$

THÉORÈME 18

Formule de dualité.

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \widehat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) g(t) dt$$

3. Inversion

THÉORÈME 19

Formule d'inversion de Fourier.

Si $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{\widehat{f}}(-x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

EXEMPLE 20

Une solution de l'équation intégrale d'inconnue y :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

est $x \mapsto \frac{a(b-a)}{b\pi(x^2 + (b-a)^2)}$ pour $0 < a < b$.

COROLLAIRE 21

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application injective.

PROPOSITION 22

Soient $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f} * \widehat{g}$$

II – Transformation de Fourier dans d'autres espaces

1. Dans $L_2(\mathbb{R}^d)$

THÉORÈME 23

Théorème de Plancherel-Parseval.

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d), \|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

REMARQUE 24

En termes de produit scalaire, la formule précédente s'écrit

$$\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

THÉORÈME 25

Soit $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Alors :

- (i) Il existe une suite (f_n) de $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) Pour une telle suite (f_n) , la suite $(\hat{f}_n)$ converge dans $L_2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

DÉFINITION 26

La limite $\tilde{f}$ est la **transformée de Fourier** de f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.

PROPOSITION 27

Les transformations de Fourier $L_1(\mathbb{R}^d)$ et $L_2(\mathbb{R}^d)$ coïncident sur $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

REMARQUE 28

On a prolongé $\mathcal{F}$ à $L_2(\mathbb{R}^d)$, mais il faut prendre garde au fait que $\mathcal{F}$ désigne deux applications distinctes : $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, ces deux applications ne coïncidant que sur $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

PROPOSITION 29

Soit $f \in L_2(\mathbb{R})$. On a les relations suivantes :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\varphi_A - \hat{f}\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$$

où

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ et } \psi_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

COROLLAIRE 30

Lorsque $f \in L_2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, on a

$$\text{pp. en } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

THÉORÈME 31

Formule d'inversion de Fourier-Plancherel.

L'opérateur de Fourier-Plancherel

$$\mathcal{P}: \begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & L_2(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \mathcal{F}(f) \end{array}$$

est un automorphisme d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.

EXEMPLE 32

On pose $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ et on a $\forall \xi \neq 0, \hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$. Or, $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$. On peut calculer sa transformée de Fourier dans $L_2(\mathbb{R})$:

$$\text{pp. en } x \in \mathbb{R}, \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x) = 2\pi \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$$

[D-L]
p. 451

2. Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

DÉFINITION 33

Une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **à décroissance rapide** si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$$

où $(x_1, \dots, x_d)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.

[AMR08]
p. 133

EXEMPLE 34

$x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 35

On appelle **classe de Schwartz**, notée $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

PROPOSITION 36

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel stable par dérivation, par multiplication par un polynôme, par produit, par conjugaison et par translation.

THÉORÈME 37

- (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$.
 (ii) $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

THÉORÈME 38

$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un automorphisme bicontinu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont l'inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{F}$$

III – Applications

1. Séries de fonctions

THÉORÈME 39

Formule sommatoire de Poisson.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

[GOU20]
p. 284

APPLICATION 40

Identité de Jacobi.

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

2. Bases hilbertiennes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto x^n$.

[BMP]
p. 110

DÉFINITION 41

On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive presque partout et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$.

Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids.

NOTATION 42

On note $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 43

Muni de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

$L_2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

THÉORÈME 44

Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n . C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à ρ sur I .

EXEMPLE 45

Polynômes de Hermite.

Si $I = \mathbb{R}$ et si $\forall x \in I, \rho(x) = e^{-x^2}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n} (e^{-x^2})$$

LEMME 46

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_1(I, \rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

p. 140

DEV**APPLICATION 47**

On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

CONTRE-EXEMPLE 48

On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. Alors, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

3. En probabilités

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire.

[G-K]
p. 239

DÉFINITION 49

On appelle **fonction caractéristique** de X , notée ϕ_X , la transformée de Fourier de la loi $\mathbb{P}_X$ (définie à un signe près) :

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})$$

REMARQUE 50

Si X est un vecteur aléatoire réel admettant f pour densité, alors

p. 165

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} f(x) dx$$

THÉORÈME 51

Soient X et Y deux vecteurs aléatoires réels. Alors,

p. 239

$$\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

EXEMPLE 52

- $X \sim \mathcal{U}([-1, 1]) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
- $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \implies \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = G_X(e^{it})$ où G_X est la fonction génératrice de X .

THÉORÈME 53

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors dans pour une variable aléatoire réelle,

$$\mathbb{E}(|X|^N) < +\infty \implies \phi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

COROLLAIRE 54

On se place dans le cadre du théorème précédent. On a :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$$

THÉORÈME 55

Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires réels indépendants :

- (i) $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.
- (ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}^d, \phi_{(X,Y)}(s, t) = \phi_X(s) \phi_Y(t)$.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.