

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

I – Dérivabilité au sens complexe

DÉFINITION 1

On dit que f est **holomorphe** en $a \in \Omega$ s'il existe un complexe $f'(a)$ tel que

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On dit que f est holomorphe sur Ω si elle l'est en tout point de Ω et on note f' la fonction $f' : z \mapsto f'(z)$ ainsi que $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

[QUE]
p. 76

EXEMPLE 2

- $z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée $z \mapsto 2z$.
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 3

(i) $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ avec pour tout $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(g+h)' = g' + h'$.
- $(\lambda g)' = \lambda g'$.
- $(gh)' = g'h + gh'$.
- $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$ quand h ne s'annule pas sur Ω .

(ii) Pour tout $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $h \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ où $g(\Omega) \subseteq \Omega_1$

$$h \circ g \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ et } (h \circ g)' = (h' \circ g)g'$$

(iii) Soit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe bijective d'inverse h . On suppose h continue en $b = g(a)$ et $g'(a) \neq 0$. Alors h est holomorphe en b et

$$h'(b) = \frac{1}{g'(a)}$$

THÉORÈME 4**Conditions de Cauchy-Riemann.**

On pose $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$. On suppose f $\mathbb{R}$ -différentiable en $a \in \Omega$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est holomorphe en a .
- (ii) df_a est $\mathbb{C}$ -linéaire.
- (iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
- (iv) $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

[BMP]
p. 57**EXEMPLE 5**

$z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ ne sont holomorphes en aucun point de $\mathbb{C}$.

[QUE]
p. 115**THÉORÈME 6****Théorème de Weierstrass.**

Une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact de Ω a une limite holomorphe sur Ω . De plus, la suite des dérivées k -ième converge uniformément sur tout compact vers la dérivée k -ième de la limite pour tout $k \in \mathbb{N}$.

[BMP]
p. 69

II – Séries entières et analytité

1. Généralités sur les séries entières

DÉFINITION 7

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

[GOU20]
p. 247**LEMME 8****Lemme d'Abel.**

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- (ii) $\forall r \in]0, |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

DÉFINITION 9

En reprenant les notations précédentes, le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

EXEMPLE 10

- $\sum n^2 z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On note $z \mapsto e^z$ la fonction somme.

p. 255

PROPOSITION 11

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \neq 0$. On note f la somme de cette série sur $D(0, r)$. Alors $f \in \mathcal{H}(D(0, r))$ et,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in D(0, r)$.

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est k fois dérivable avec

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}$$

[QUE]
p. 57

2. Analyticité

DÉFINITION 12

On dit que f est **analytique** sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq r$, tels que

$$D(a, r) \subseteq \Omega \text{ et } \forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

ie. f est développable en série entière en tout point de Ω . On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω .

p. 57

PROPOSITION 13

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \neq 0$. On note f la somme de cette série sur $D(0, r)$. Alors $f \in \mathcal{A}(D(0, r))$ et, si $|z-a| < r - |a|$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

(où $f^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée complexe de f).

PROPOSITION 14

$$\mathcal{A}(\Omega) \subseteq \mathcal{H}(\Omega).$$

p. 85

PROPOSITION 15

Si $f = P/Q$ est une fraction rationnelle, alors f est développable en série entière au voisinage de chaque point qui n'est pas un pôle de f (cf. Définition 40).

p. 78

THÉORÈME 16**Zéros isolés.**

On suppose Ω connexe et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si f n'est pas identiquement nulle sur Ω , alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω .

[BMP]
p. 53**COROLLAIRE 17**

Si Ω est connexe, $\mathcal{A}(\Omega)$ est une algèbre intègre.

p. 73

REMARQUE 18**Prolongement analytique.**

Reformulé de manière équivalente au Théorème 16, si Ω est connexe et si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω , alors elles sont égales sur Ω .

p. 53

EXEMPLE 19

Il existe une unique fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

et c'est la fonction identité.

p. 77

CONTRE-EXEMPLE 20

Il existe au moins deux fonctions g holomorphes sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

III – Holomorphie et intégration

1. Intégration sur une courbe

DÉFINITION 21

- Un **chemin** est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (où $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$) continue.
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est **fermé**.
- Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on dit que γ est une **courbe**.
- On appelle $\gamma^* = \gamma([a, b])$ l'**image** de γ .

[QUE]
p. 85**EXEMPLE 22**

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \omega + r e^{it} \end{array}$$

est une courbe fermée (c'est la paramétrisation du cercle de centre ω et de rayon r).

DÉFINITION 23

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe. L'**intégrale curviligne** le long de γ est

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

PROPOSITION 24

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe de longueur $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$, alors,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \times L(\gamma)$$

PROPOSITION 25

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe. On suppose $\gamma^* \subseteq \Omega$, f holomorphe sur Ω telle que f' est continue sur γ^* . Alors,

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

2. Théorie de Cauchy et lien avec l'analyticité

DÉFINITION 26

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe ferm e telle que $\omega \notin \gamma^*$. L'**indice** de ω par rapport à γ , noté $I(\omega, \gamma)$, est défini par

$$I(\omega, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \omega} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \omega} dt$$

REMARQUE 27

En reprenant les notations précédentes, $I(\omega, \gamma)$ compte le nombre de tours orientés que γ fait autour de ω . En particulier :

(i) On a toujours $I(\omega, \gamma) \in \mathbb{Z}$.

(ii) On note $\gamma^* = \gamma([a, b])$ l'image de γ . $I(\omega, \gamma)$ est nulle sur la composante connexe non born e de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

THÉORÈME 28**Cauchy homologique.**

Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω (ie. tel que $a \notin \Omega \implies I(a, \Gamma) = 0$). On suppose $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

p. 134

COROLLAIRE 29**Formule intégrale de Cauchy.**

Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω . On suppose $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors,

$$z_0 \in \Omega \setminus \Gamma^* \implies \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = I(z_0, \Gamma) f(z_0)$$

COROLLAIRE 30

On a $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq \mathcal{A}(\Omega)$. De plus, si $a \in \Omega$ et si $r \in]0, d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)[$, on a

$$f(a + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n \text{ pour } |h| < r \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

p. 85

[BMP]
p. 64

3. Conséquences

PROPOSITION 31**Inégalités de Cauchy.**

On suppose f holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a, R)$. On note c_n les coefficients du développement en série entière de f en a . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, R], |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

[QUE]
p. 102**COROLLAIRE 32****Théorème de Liouville.**

On suppose f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si f est bornée, alors f est constante.

THÉORÈME 33**Principe du maximum.**

On suppose Ω borné et f holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$. On note M le sup de $|f|$ sur la frontière (compacte) de Ω . Alors,

$$\forall z \in \Omega, |f(z)| \leq M$$

p. 107

4. Holomorphie d'une intégrale à paramètre**THÉORÈME 34****Holomorphie sous le signe intégral.**

On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe dans Ω . On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(z, x)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x)$$

p. 101

APPLICATION 35

Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$. Si sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$ est nulle, alors $f = 0$.

p. 115

APPLICATION 36

$F : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui coïncide avec la transformée de Fourier de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On trouve en particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = F(it) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

[BMP]
p. 83**NOTATION 37**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids. On note :

- $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto x^n$.
- $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

p. 110

LEMME 38

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_1(I, \rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

p. 140

APPLICATION 39

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I .

On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

DEV

IV – Méromorphie

1. Singularités

DÉFINITION 40

Soit $a \in \Omega$. On suppose $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$.

- On dit que a est une **singularité effaçable** pour f s'il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \Omega \setminus \{a\}$.
- On dit que a est un **pôle** d'ordre m s'il existe des scalaires $c_{-1}, \dots, c_{-m}$ avec $c_{-m} \neq 0$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité effaçable en a .
- $\sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ est la **partie principale** de f en a et c_{-1} est le **résidu** de f en a noté $\text{Res}(f, a)$.

[QUE]
p. 165**EXEMPLE 41**

- $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité effaçable en 0.
- $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 (simple) en 0 avec partie principale égale à $\frac{1}{z}$ et $\text{Res}(f, 0) = 1$.

DÉFINITION 42

On dit que f est **méromorphe** sur Ω s'il existe $A \subseteq \Omega$ tel que :

- A n'a que des points isolés dans Ω (en particulier, A est au plus dénombrable et $\Omega \setminus A$ est ouvert).
- $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$.
- f a un pôle en chaque point de A .

EXEMPLE 43

$z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et en reprenant les notations précédentes, $A = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLE 44

La fonction Γ définie par

$$\Gamma : \begin{array}{ll} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{array}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont les entiers négatifs.

[BMP]
p. 82

PROPOSITION 45

On suppose $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont holomorphes en un voisinage de $a \in \Omega$ avec a un zéro simple de h et $g(a) \neq 0$. Alors, a est un pôle simple de f de résidu

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

[QUE]
p. 168

EXEMPLE 46

Le résidu de $z \mapsto \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ en 1 est égal à $\frac{3}{4}$.

2. Théorème des résidus

THÉORÈME 47

des résidus.

On suppose f méromorphe sur Ω et on note A l'ensemble de ses pôles. Soit γ une courbe homologue à zéro dans Ω et ne rencontrant pas A . Alors,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in A} I(a, \gamma) \operatorname{Res}(f, a)$$

EXEMPLE 48

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2 \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

p. 173

EXEMPLE 49

Intégrale de Dirichlet.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

DEV

EXEMPLE 50

Transformée de Fourier d'une gaussienne.

On définit $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

[AMR08]
p. 156

APPLICATION 51

Théorème de Kronecker.

On suppose f holomorphe sur Ω et non identiquement nulle dans Ω . Soit γ une courbe homologue à zéro dans Ω , et qui ne rencontre pas l'ensemble des zéros de f . Alors, le nombre $Z = Z(f)$ des zéros de f à l'intérieur de γ comptés avec multiplicités vérifie

$$Z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

[QUE]
p. 171

APPLICATION 52

Théorème de Rouché.

Soient γ un cycle homologue à zéro dans Ω et $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose

$$z \in \gamma^* \implies |h(z)| < |g(z)|$$

Alors,

$$Z(g) = Z(g + h)$$

EXEMPLE 53

$z \mapsto z^8 - 5z^3 + z - 2$ a trois zéros dans $D(0, 1)$.

[BMP]
p. 67

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Analyse complexe et applications

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.