

244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

I – La fonction exponentielle

1. Dans le champ complexe

DÉFINITION 1

On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme e^z ou parfois $\exp(z)$.

[QUE]
p. 4

REMARQUE 2

Cette somme est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le critère de d'Alembert.

PROPOSITION 3

- (i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
- (ii) $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée elle-même.
- (iii) $\exp$ ne s'annule jamais.
- (iv) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION 4

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

PROPOSITION 5

En reprenant les notations précédentes, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, de la forme $\operatorname{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$. On note $a = 2\pi$.

APPLICATION 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a n racines n -ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

[R-R]
p. 259

COROLLAIRE 7

Tout nombre complexe non nul α écrit $\alpha = r e^{i\theta}$ admet exactement n racines n -ièmes données par

$$\sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n - 1$.

2. Dans le champ réel

DÉFINITION 8

On a plusieurs définitions (équivalentes) de la fonction exponentielle réelle.

- **Vision “moderne”** : Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (restriction de la série entière de la Définition 1).
- **Vision “pédagogique”** : $\exp$ est l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- **Vision “historique”** : Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

[D-L]
p. 528

THÉORÈME 9

- (i) $\exp$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- (iii) $x < 0 \iff \exp(x) < 1$.

[QUE]
p. 6

3. Fonctions trigonométriques

DÉFINITION 10

On définit les fonctions $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it)) \text{ et } \cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$$

PROPOSITION 11

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$(i) \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$(ii) \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

(iii) Ces fonctions sont réelles, 2π -périodiques et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. Ceci permet de les prolonger de manière unique sur tout le plan complexe.

(iv) $\sin$ et $\cos$ sont dérivables avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

(v) $\cos$ est paire, $\sin$ est impaire.

[DAN]
p. 352

PROPOSITION 12

L'application

$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme de $\mathbb{U}$ dans $\text{SO}_2(\mathbb{R})$.

[ROM21]
p. 36

4. Polynômes trigonométriques

DÉFINITION 13

- On appelle **polynôme trigonométrique** de degré inférieur à $N \in \mathbb{N}$ toute fonction de la forme $x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ avec $\forall n \in \llbracket -N, N \rrbracket, c_n \in \mathbb{C}$.
- On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions de la variable réelle x et de la forme $c_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$, notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

[GOU20]
p. 268

EXEMPLE 14

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$ est appelée **noyau de Dirichlet** d'ordre N .
- Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé **noyau de Fejér** d'ordre N .

[AMR08]
p. 184

THÉORÈME 15

Théorème de Fejér.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique.

- (i) Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f .
- (ii) Si $f \in L_p^{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour $\|\cdot\|_p$.

p. 190

COROLLAIRE 16

L'espace des polynômes trigonométriques $\{\sum_{n=-N}^N c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$ est dense dans l'espace des fonctions continues 2π -périodiques pour $\|\cdot\|_\infty$ et est dense dans $L_p^{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

THÉORÈME 17**Théorème de Dirichlet.**

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors,

$$S_N(f)(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

[GOU20]
p. 271

CONTRE-EXEMPLE 18

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, 2π -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2p^3 + 1) \frac{x}{2}\right)$$

Alors f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

COROLLAIRE 19

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x , la série de Fourier de f converge vers $f(x)$.

EXEMPLE 20

On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

THÉORÈME 21**Formule sommatoire de Poisson.**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

p. 284

APPLICATION 22**Identité de Jacobi.**

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

II – Logarithmes

1. Logarithme dans le champ réel

PROPOSITION 23

$\exp$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

[DAN]
p. 346

DÉFINITION 24

La bijection réciproque de $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est appelée **logarithme népérien** et est notée $\ln$.

THÉORÈME 25

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx.$
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$

REMARQUE 26

La fonction $\ln$ permet de définir la mise à la puissance par un réel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}, t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$$

2. Logarithmes dans le champ complexe

THÉORÈME 27

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* e^{i\alpha}$. Alors, il existe une fonction L_α holomorphe sur Ω_α . Elle vérifie :

- (i) $e^{L_\alpha(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega_\alpha$.
- (ii) $L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta_\alpha(z)$ avec $\theta_\alpha \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.
- (iii) L_α est dérivable dans Ω_α avec $L'_\alpha(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega_\alpha$.

[QUE]
p. 81

DÉFINITION 28

La fonction L_α précédente est appelée **détermination d'ordre α** (ou **détermination principale** si $\alpha = -\pi$) du logarithme.

THÉORÈME 29

On pose $D = D(0, 1)$ et on définit $\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$ par $\ell : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$. Alors :

- (i) $1 + z = \exp(\ell(z))$ pour tout $z \in D$.
- (ii) $\ell(z) = L_{-\pi}(1 + z)$ pour tout $z \in D$.

III – La fonction Γ d'Euler

1. Définition

DÉFINITION 30

On pose

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

[GOU20]
p. 162

PROPOSITION 31

(i) Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

(ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(iii) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = n!$.

LEMME 32

La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

[ROM19-1]
p. 364

THÉORÈME 33

Théorème de Bohr-Mollerup.

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 32. Alors $f = \Gamma$.

REMARQUE 34

À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

LEMME 35

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$.

[G-K]
p. 180

DEV

DEV

APPLICATION 36

Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 556

2. Prolongement complexe

On suppose ici que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

[Z-Q]
p. 314

THÉORÈME 37

Holomorphie sous le signe intégral.

On suppose :

- (i) $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x) \in L_1(X)$.
- (ii) pp. en $x \in X, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe dans Ω . On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.
- (iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(z, x)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x)$$

EXEMPLE 38

La fonction Γ est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

p. 318

THÉORÈME 39

On peut prolonger Γ en une fonction holomorphe non nulle sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

THÉORÈME 40

Formule des compléments.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

[QUE]
p. 255

IV – La fonction ζ de Riemann

1. Définition

DÉFINITION 41

Pour tout $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

[GOU20]
p. 302

PROPOSITION 42

ζ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[, \zeta^{(p)}(s) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^p}{n^s}$$

PROPOSITION 43

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 \text{ et, quand } s \rightarrow 1^+, \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

PROPOSITION 44

$$\forall s > 1, \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

[G-K]
p. 108

2. Prolongement complexe

PROPOSITION 45

On prolonge la définition de ζ donnée à la Définition 41 en posant

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

[Z-Q]
p. 20

PROPOSITION 46

ζ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

THÉORÈME 47

Il existe une fonction $\tilde{\zeta}$, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ telle que :

- (i) Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$ avec η holomorphe dans $\mathbb{C}$.
- (ii) Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, $\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s)$.
- (iii) En posant $I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$, on a $I(s) = I(1-s)$ par prolongement méromorphe.

p. 28

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Analyse complexe et applications

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.

Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.
<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.