

243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I – Séries entières et rayons de convergence

1. Définitions

DÉFINITION 1

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

[GOU20]
p. 247

EXEMPLE 2

$\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière.

LEMME 3

Lemme d'Abel.

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- (ii) $\forall r \in]0, |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

DÉFINITION 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$. On a :

- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.
- $\forall r \in [0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Le disque $D(0, R)$ est le **disque de convergence** de la série, le cercle $C(0, R)$ est le **cercle d'incertitude**.

2. Comparaison de rayons de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

PROPOSITION 5

- (i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
- (ii) Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
- (iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

EXEMPLE 6

La série entière $\sum e^{\cos(n)} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

3. Calcul du rayon de convergence

PROPOSITION 7

Règle de d'Alembert.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

p. 233

EXEMPLE 8

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

PROPOSITION 9

Formule d'Hadamard.

Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $\frac{1}{\rho}$ où

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

EXEMPLE 10

La série entière $\sum 2^n z^{2n}$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

COROLLAIRE 11

Règle de Cauchy.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

EXEMPLE 12

La série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ a un rayon de convergence égal à 2.

4. Étude sur le cercle d'incertitude

EXEMPLE 13

Le comportement d'une série entière peut varier sur le cercle d'incertitude suivant ses coefficients :

- $\sum z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 diverge en tout point de $C(0, 1)$.
- $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 converge en tout point de $C(0, 1)$.
- $\sum \frac{1}{n} z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 diverge en 1 mais converge en tout autre point de $C(0, 1)$.

p. 231

THÉORÈME 14

Abel angulaire.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

[GOU20]
p. 263

APPLICATION 15

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

APPLICATION 16

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

CONTRE-EXEMPLE 17

La réciproque est fautive :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

alors que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

THÉORÈME 18

Taubérien faible.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série sur $D(0, 1)$. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

REMARQUE 19

Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 14. Il reste vrai en supposant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c'est le théorème Taubérien fort).

II – Propriétés

1. Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

[AMR11]
p. 235

PROPOSITION 20

En multipliant $\sum a_n z^n$ par un scalaire non nul, on ne change pas le rayon de convergence de la série initiale.

DÉFINITION 21

On appelle **série entière somme** la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

PROPOSITION 22

On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série somme. Alors $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

EXEMPLE 23

Les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur rayon de convergence égal à 1 et la série somme un rayon de convergence infini.

[GOU20]
p. 248

DÉFINITION 24

On appelle **produit de Cauchy** la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

[AMR11]
p. 235

PROPOSITION 25

On note R_c le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$. Alors,

(i) $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

(ii) $\forall z \in D(0, \min\{R_a, R_b\}), \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$.

2. Propriétés de la somme

Dans toute cette sous-partie, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme sur $D(0, R)$.

PROPOSITION 26

S est continue sur $D(0, R)$.

EXEMPLE 27

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

COROLLAIRE 28

$\forall p \in \mathbb{N}$, S admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de l'origine, dont la partie régulière est donnée par $a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$.

PROPOSITION 29

Soit $[a, b] \subseteq]-R, R[$, alors

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

COROLLAIRE 30

Les primitives de S sont de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION 31

S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

REMARQUE 32

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

EXEMPLE 33

$$\forall x \in] -1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3. Développement en série entière

DÉFINITION 34

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière en** $a \in U$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $D(a, r) \subseteq U$ et

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$$

[BMP]
p. 46

EXEMPLE 35

Tout polynôme est développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

[AMR11]
p. 241

PROPOSITION 36

Soient $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux fonctions développables en séries entières en 0. Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f + g$ est développable en série entière et son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$$

(ii) fg est développable en série entière et son développement est le produit de Cauchy des deux séries entières.

PROPOSITION 37

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière en 0. Alors $\exists I \subseteq \mathbb{R}$ avec $0 \in I$ tel que :

(i) f' est développable en série entière en 0 son développement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

(ii) f est donc $\mathcal{C}^\infty$.

(iii) f est continue et si F est une primitive de f sur I , F est développable en série entière en 0 son développement est

$$F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

EXEMPLE 38

Voici quelques développements en série entière usuels :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\forall \alpha > 0, \forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

CONTRE-EXEMPLE 39

La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

[BMP]
p. 55

III – Applications

1. Analyse complexe

DÉFINITION 40

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **analytique sur U** si f est développable en série entière en tout point de U .

p. 46

THÉORÈME 41

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in D(0, R)$. On note $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est holomorphe en z_0 et $f'(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

THÉORÈME 42

Zéros isolés.

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si f est une fonction analytique non identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans U .

COROLLAIRE 43

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Alors f admet un nombre fini de zéros dans tout compact de U .

COROLLAIRE 44

Deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales.

[GOU20]
p. 250

THÉORÈME 45

Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de rayon ρ centré en un point a . Alors f est analytique sur ce disque. De plus, on a convergence normale sur tout compact du disque.

[BMP]
p. 63

2. Dénombrement

DEV

APPLICATION 46

Nombres de Bell.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par convention on pose $B_0 = 1$. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

[GOU20]
p. 314

APPLICATION 47

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sigma \in S_n$ est un **dérangement** de S_n si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \neq k$. Alors,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

[DAN]
p. 336

3. Équations différentielles

PROPOSITION 48

Pour résoudre une équation différentielle linéaire (L) à l'aide des séries entières :

- (i) On suppose que $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (L) et on l'introduit dans (L) .
- (ii) On se ramène à $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0$ où les b_n dépendent des a_n .
- (iii) On trouve une relation liant les a_n et on vérifie que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence non-nul.

[AMR11]
p. 246

EXEMPLE 49

Les solutions de $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda \frac{x}{1-x}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$).

p. 273

Annexes

[GOU20]
p. 263

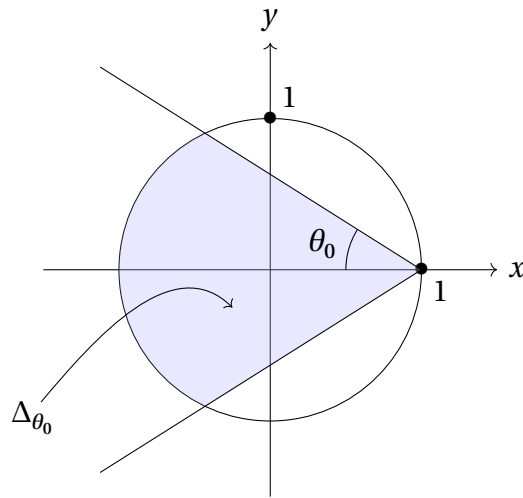


FIGURE 1 : Illustration du théorème d'Abel angulaire.

Bibliographie

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.