

## 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

### I – Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$  où  $(E, d)$  est un espace métrique. On pose  $F : t \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ .

#### 1. Continuité

##### THÉORÈME 1

**Continuité sous le signe intégral.**

On suppose :

- (i)  $\forall t \in E, x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto f(t, x)$  est continue en  $t_0 \in E$ .
- (iii)  $\exists g \in L_1(X)$  positive telle que

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \text{ pp. en } x \in X$$

Alors  $F$  est continue en  $t_0$ .

[Z-Q]  
p. 312

##### COROLLAIRE 2

On suppose :

- (i)  $\forall t \in E, x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $E$ .
- (iii)  $\forall K \subseteq E, \exists g_K \in L_1(X)$  positive telle que

$$|f(t, x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors  $F$  est continue sur  $E$ .

##### EXEMPLE 3

La fonction

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \rightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{array}$$

est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

p. 318

## EXEMPLE 4

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable. Alors,

$$\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

est bien définie et est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

[G-K]  
p. 104

## 2. Dérivabilité

On suppose ici que  $E$  est un intervalle  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ .

[Z-Q]  
p. 313

## THÉORÈME 5

### Dérivation sous le signe intégral.

On suppose :

- (i)  $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x) \in L_1(X)$ .
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur  $I$ . On notera  $\frac{\partial f}{\partial t}$  cette dérivée définie presque partout.
- (iii)  $\forall K \subseteq I$  compact,  $\exists g_K \in L_1(X)$  positive telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g_K(x) \quad \forall t \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors  $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \in L_1(X)$  et  $F$  est dérivable sur  $I$  avec

$$\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$$

## REMARQUE 6

- Si dans le Théorème 5, hypothèse (ii), on remplace “dérivable” par “ $\mathcal{C}^1$ ”, alors la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- On a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

**THÉORÈME 7**

**$k$ -ième dérivée sous le signe intégral.**

On suppose :

- (i)  $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x) \in L_1(X)$ .
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto f(t, x) \in \mathcal{C}^k(I)$ . On notera  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f$  la  $j$ -ième dérivée définie presque partout pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .
- (iii)  $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall K \subseteq I$  compact,  $\exists g_{j,K} \in L_1(X)$  positive telle que

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^j f(t, x) \right| \leq g_{j,K}(x) \quad \forall t \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors  $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall t \in I, x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(t, x) \in L_1(X)$  et  $F \in \mathcal{C}^k(I)$  avec

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall t \in I, F^{(j)}(t) = \int_X \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^j f(t, x) d\mu(x)$$

**EXEMPLE 8**

La fonction  $\Gamma$  de l'Exemple 3 est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

p. 318

**LEMME 9**

La fonction  $\Gamma$  définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  vérifie :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
- (ii)  $\Gamma(1) = 1$ .
- (iii)  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

[ROM19-1]  
p. 364**THÉORÈME 10**

**Théorème de Bohr-Mollerup.**

Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Lemme 9. Alors  $f = \Gamma$ .

**EXEMPLE 11**

On se place dans l'espace mesuré  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$  et on considère  $(f_n)$  une suite de fonctions dérivables sur  $I$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| + \sup_{t \in I} |f'_n(t)| < +\infty$$

Alors  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  est dérivable sur  $I$  de dérivée  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n(x)$ .

[B-P]  
p. 149**APPLICATION 12**

**Transformée de Fourier d'une Gaussienne.**

En résolvant une équation différentielle linéaire, on a

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-itx} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

[GOU20]  
p. 169

DEV

## APPLICATION 13

**Intégrale de Dirichlet.**

On pose  $\forall x \geq 0$ ,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

alors :

- (i)  $F$  est bien définie et est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- (ii)  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*^+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .
- (iii)  $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

[G-K]  
p. 107

### 3. Holomorphie

On suppose ici que  $E$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ .

[Z-Q]  
p. 314

## THÉORÈME 14

**Holomorphie sous le signe intégral.**

On suppose :

- (i)  $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x) \in L_1(X)$ .
- (ii) pp. en  $x \in X, z \mapsto f(z, x)$  est holomorphe dans  $\Omega$ . On notera  $\frac{\partial f}{\partial z}$  cette dérivée définie presque partout.
- (iii)  $\forall K \subseteq \Omega$  compact,  $\exists g_K \in L_1(X)$  positive telle que

$$|f(z, x)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{ pp. en } x$$

Alors  $F$  est holomorphe dans  $\Omega$  avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x)$$

## EXEMPLE 15

La fonction  $\Gamma$  de l'Exemple 3 est holomorphe dans l'ouvert  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

p. 318

## II – Produit de convolution

### 1. Notion de convolée de deux fonctions

#### DÉFINITION 16

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de  $f$  et  $g$  en  $x \in \mathbb{R}^d$  **existe** si la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

#### PROPOSITION 17

Dans  $L_1(\mathbb{R}^d)$ , le produit de convolution est commutatif, bilinéaire et associatif.

#### THÉORÈME 18

Soient  $p, q > 0$  et  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ .

(i) Si  $p, q \in [1, +\infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors  $(f * g)(x)$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et est uniformément continue. On a,  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$  et, si  $p \neq 1, +\infty$ ,  $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ .

(ii) Si  $p = 1$  et  $q = +\infty$ , alors  $(f * g)(x)$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ .

(iii) Si  $p = 1$  et  $q \in [1, +\infty[$ , alors  $(f * g)(x)$  existe pp. en  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $f * g \in L_q(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$ .

(iv) Si  $p = 1$  et  $q = 1$ , alors  $(f * g)(x)$  existe pp. en  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

#### EXEMPLE 19

Soient  $a < b \in \mathbb{R}_*^+$ . Alors  $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et

$$(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**PROPOSITION 20**

$L_1(\mathbb{R}^d)$  est une algèbre de Banach pour le produit de convolution.

p. 85

**REMARQUE 21**

Cette algèbre n'a pas d'élément neutre. Afin de pallier à ce manque, nous allons voir la notion d'approximation de l'identité dans la sous-section suivante.

## 2. Approximation de l'identité

**DÉFINITION 22**

On appelle **approximation de l'identité** toute suite  $(\rho_n)$  de fonctions mesurables de  $L_1(\mathbb{R}^d)$  telles que

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda_d = 1.$
- (ii)  $\sup_{n \geq 1} \|\rho_n\|_1 < +\infty.$
- (iii)  $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \epsilon)} |\rho_n(x)| dx = 0.$

[B-P]  
p. 306**REMARQUE 23**

Dans la définition précédente, (i) implique (ii) lorsque les fonctions  $\rho_n$  sont positives, puisque  $\|\rho_n\|_1 = 1$ . Plutôt que des suites, on pourra considérer les familles indexées par  $\mathbb{R}_*^+$ .

**EXEMPLE 24**

- Noyau de Laplace sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$$

- Noyau de Cauchy sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$$

- Noyau de Gauss sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}$$

**APPLICATION 25****Théorème de Weierstrass.**

Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $[a, b]$ .

[GOU20]  
p. 304

**THÉORÈME 26**

Soit  $(\rho_n)$  une approximation de l'identité. Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ , alors :

$$\forall n \geq 1, f * \rho_n \in L_p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \rho_n - f\|_p \rightarrow 0$$

[B-P]  
p. 307**THÉORÈME 27**

Soient  $(\rho_n)$  une approximation de l'identité et  $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- Si  $f$  est continue en  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , alors  $(f * \rho_n)(x_0) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$ .
- Si  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\|f * \rho_n - f\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Si  $f$  est continue sur un compact  $K$ , alors  $\sup_{x \in K} |(f * \rho_n)(x) - f(x)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**DÉFINITION 28**

On qualifie de **régularisante** toute suite  $(\alpha_n)$  d'approximations de l'identité telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

**EXEMPLE 29**

Soit  $\alpha \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  une densité de probabilité. Alors la suite  $(\alpha_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx)$  est régularisante.

**APPLICATION 30**

- (i)  $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .
- (ii)  $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $L_p(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_p$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .

[AMR08]  
p. 96

## III – Transformée de Fourier

### 1. Sur $L_1(\mathbb{R}^d)$

**DÉFINITION 31**

Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée  $\hat{f}$  par

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{array}$$

p. 109

**LEMME 32**

**Lemme de Riemann-Lebesgue.**

Soit  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\hat{f}$  existe et

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

**THÉORÈME 33**

$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\widehat{f}$  est continue, bornée par  $\|f\|_1$ . Donc la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}: \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

**COROLLAIRE 34**

La transformation de Fourier  $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  est une application linéaire continue.

**EXEMPLE 35**

**Densité de Poisson.**

On pose  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ . Alors  $p \in L_1(\mathbb{R})$  et,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$ .

**EXEMPLE 36**

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \begin{cases} \frac{2 \sin(\xi)}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons ici que la transformée de Fourier n'est pas intégrable.

**PROPOSITION 37**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

p. 114

**THÉORÈME 38**

**Formule de dualité.**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \widehat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) g(t) dt$$

**COROLLAIRE 39**

La transformation de Fourier  $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  est une application injective.

**APPLICATION 40**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\rho$  une fonction poids. On considère  $(P_n)$  la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  sur  $I$ . On suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors  $(P_n)$  est une base hilbertienne de  $L_2(I, \rho)$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

[BMP]  
p. 140

**THÉORÈME 41****Formule d'inversion de Fourier.**

Si  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$  est telle que  $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\hat{\hat{f}}(-x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

[AMR08]  
p. 116**PROPOSITION 42**

Soient  $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$  et  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f} * \hat{g}$$

**2. Sur  $L_2(\mathbb{R}^d)$** **THÉORÈME 43****Théorème de Plancherel-Parseval.**

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d), \|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

**THÉORÈME 44**

Soit  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- (i) Il existe une suite  $(f_n)$  de  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$  qui converge vers  $f$  dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .
- (ii) Pour une telle suite  $(f_n)$ , la suite  $(\hat{f}_n)$  converge dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$  vers une limite  $\tilde{f}$  indépendante de la suite choisie.

**DÉFINITION 45**

La limite  $\tilde{f}$  est la **transformée de Fourier** de  $f$  dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

**PROPOSITION 46**

Les transformations de Fourier  $L_1(\mathbb{R}^d)$  et  $L_2(\mathbb{R}^d)$  coïncident sur  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ .

### 3. Application en probabilités

**DÉFINITION 47**

Soit  $X$  un vecteur aléatoire. On appelle **fonction caractéristique** de  $X$ , notée  $\phi_X$ , la transformée de Fourier de la loi  $\mathbb{P}_X$  (définie à un signe près) :

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})$$

**THÉORÈME 48**

Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs aléatoires. Alors,

$$\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

**COROLLAIRE 49**

Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs aléatoires tels que  $\forall a \in \mathbb{R}^d$ ,  $\langle X, a \rangle$  et  $\langle Y, a \rangle$  ont même loi. Alors,  $X$  et  $Y$  ont même loi.

# Bibliographie

---

## Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

---

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

---

## Analyse

[B-P]

Marc BRIANE et Gilles PAGES. *Analyse. Théorie de l'intégration*. 8<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration>.

---

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

---

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

---

## Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

---

## Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.