

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I – Fonctions monotones

1. Définition et première propriétés

DÉFINITION 1

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est **croissante** si $\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est **décroissante** si $\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est **monotone** si f est croissante ou décroissante.

[R-R]
p. 31

REMARQUE 2

Les définitions de f **strictement croissante** et f **strictement décroissante** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Par conséquent, f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante. Pour cette raison, nous pouvons nous limiter à l'étude des fonctions croissantes.

EXEMPLE 3

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction monotone.

PROPOSITION 4

L'ensemble des fonctions croissantes est stable par addition, par multiplication par un scalaire positif et par composition.

[D-L]
p. 405

PROPOSITION 5

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$.

[ROM19-1]
p. 205

2. Régularité

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point.

p. 162

DÉFINITION 6

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a pour **limite à gauche** (resp. **à droite**) ℓ en $\alpha \in \bar{I}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I \cap]\alpha - \eta, \alpha[, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(resp. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I \cap]\alpha, \alpha + \eta[, |f(x) - \ell| < \epsilon$).

THÉORÈME 7

On suppose que I est un intervalle ouvert. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, elle admet alors une limite à gauche et à droite en tout point. Dans le cas où f est croissante, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x^-) = \sup_{\substack{t \in I \\ t < x}} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{\substack{t \in I \\ t > x}} f(t)$$

DÉFINITION 8

Si $\alpha \in \mathring{I}$, et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est discontinue en α avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que f a une **discontinuité de première espèce** en α .

PROPOSITION 9

Une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

THÉORÈME 10

On suppose que I est un intervalle ouvert. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de f est dénombrable.

EXEMPLE 11

La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

PROPOSITION 12

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que $f(I)$ est un intervalle, elle est alors continue sur I .

p. 175

THÉORÈME 13**Théorème de la bijection monotone.**

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et strictement monotone, alors :

- (i) $f(I)$ est un intervalle.
- (ii) f^{-1} est continue.
- (iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f .

EXEMPLE 14

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ qui admet donc une bijection réciproque $\ln$ qui est strictement croissante.

PROPOSITION 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Cette fonction f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

THÉORÈME 16**Théorème de Lebesgue.**

Une application monotone est dérivable presque partout.

[D-L]
p. 405

3. Suites et séries

LEMME 17

Une limite simple d'une suite de fonctions croissantes est croissante.

[GOU20]
p. 238

THÉORÈME 18**Second théorème de Dini.**

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles continues définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction continue sur I , alors la convergence est uniforme.

PROPOSITION 19**Comparaison série - intégrale.**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

p. 212

APPLICATION 20

Développement asymptotique de la série harmonique.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

II – Fonctions convexes

Soit I une partie convexe d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ non réduite à un point.

1. Définitions

DÉFINITION 21

- I est **convexe** si $\forall a, b \in I, [a, b] \subseteq I$.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

[ROM19-1]
p. 225

REMARQUE 22

Les définitions de f **strictement convexe** et f **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

EXEMPLE 23

- $x \mapsto \|x\|$ est convexe sur E .
- $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 24

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

THÉORÈME 25

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x, y \in I, t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0, 1]$.

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

PROPOSITION 26

- Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.
- La composée $\varphi \circ g$ d'une fonction convexe croissante $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction convexe $g : I \rightarrow J$ est convexe.
- Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

À partir de maintenant, on supposera que I est un intervalle réel non réduit à un point.

2. Propriétés sur $\mathbb{R}$

REMARQUE 27

Dans le cadre réel, la Définition 21 revient à dire que les cordes $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au-dessus du graphe de f pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$.

[GOU20]
p. 95

PROPOSITION 28

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x_0 \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

est croissante.

COROLLAIRE 29**Inégalité des trois pentes.**

Soient fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Alors,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

DÉFINITION 30

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en $a \in I$ si la limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a^- \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

(resp. $\lim_{\substack{t \rightarrow a^+ \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$) existe.

p. 71

PROPOSITION 31

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe possède en tout point de $\overset{\circ}{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\overset{\circ}{I}$. De plus les applications dérivées à gauche f'_g et à droite f'_d sont croissantes avec $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$.

p. 96

THÉORÈME 32

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe.
- (ii) f' est croissante.
- (iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

PROPOSITION 33

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

3. Fonctions log-convexes

DÉFINITION 34

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est **log-convexe** si $\ln \circ f$ est convexe sur I .

[ROM19-1]
p. 228**PROPOSITION 35**

Une fonction log-convexe est convexe.

CONTRE-EXEMPLE 36

$x \mapsto x$ est convexe mais non log-convexe.

THÉORÈME 37

Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est log-convexe.
- (ii) $\forall \alpha > 0, x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe.
- (iii) $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (f(x))^{1-t} (f(y))^t$.
- (iv) $\forall \alpha > 0, f^\alpha$ est convexe.

LEMME 38

La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- (ii) $\Gamma(1) = 1$.
- (iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

p. 364

THÉORÈME 39**Théorème de Bohr-Mollerup.**

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 38. Alors $f = \Gamma$.

p. 364

REMARQUE 40

À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

III – Applications

1. Inégalités

PROPOSITION 41**Inégalité de Hölder.**

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

[GOU20]
p. 97**PROPOSITION 42****Inégalité de Minkowski.**

Soit $p \geq 1$. Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

PROPOSITION 43**Inégalité de Jensen.**

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors pour toute fonction u continue sur un intervalle $[a, b]$, on a :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ u(t) dt$$

[ROM19-1]
p. 241

PROPOSITION 44**Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.**

Pour toute suite finie $x = (x_i)$ de n réels strictement positifs, on a :

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Recherche d'extrema**PROPOSITION 45**

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

p. 234

CONTRE-EXEMPLE 46

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

PROPOSITION 47

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α .

PROPOSITION 48

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

3. Méthode de Newton**THÉORÈME 49****Méthode de Newton.**

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c, d] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

- (i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.
- (ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ .
- (iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

DEV

[ROU]
p. 152

COROLLAIRE 50

En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

EXEMPLE 51

- On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.
- En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bibliographie

Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.