

## 228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

### I – Continuité et dérivabilité

#### 1. Continuité

##### DÉFINITION 1

- $f$  est **continue au point**  $a \in I$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

- $f$  est **continue sur**  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

[ROM19-1]  
p. 163

##### EXEMPLE 2

Pour tout entier  $n$ ,  $x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

##### THÉORÈME 3

**Caractérisations séquentielle et topologique de la continuité.**

(i)  $f$  est continue en  $a \in I$  si et seulement si toute suite de points de  $I$  qui converge vers  $a$  est transformée par  $f$  en une suite convergente vers  $f(a)$ .

(ii)  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert (resp. fermé) de  $\mathbb{R}$  est un ouvert (resp. fermé) de  $I$ .

##### EXEMPLE 4

La fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  définie sur  $\mathbb{R}_*$  n'admet pas de prolongement continu en 0.

##### PROPOSITION 5

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $I$  à valeurs réelles et continues en  $a \in I$ , alors  $|f|$ ,  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\min(f, g)$  et  $\max(f, g)$  sont continues en  $a$ .

## 2. Uniforme continuité

### DÉFINITION 6

$f$  est **uniformément continue** sur  $I$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

### REMARQUE 7

En particulier, une fonction uniformément continue sur un intervalle est continue sur ce même intervalle.

### EXEMPLE 8

Une fonction lipschitzienne sur  $I$  est uniformément continue sur  $I$ .

### CONTRE-EXEMPLE 9

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $]0, 1]$  est continue mais n'est pas uniformément continue.

### PROPOSITION 10

On se place dans le cas où  $I = \mathbb{R}^+$  et on suppose  $f$  uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors,

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \alpha x + \beta$$

p. 18

### THÉORÈME 11

**Prolongement des applications uniformément continues.**

Soit  $J \subseteq I$  dense dans  $I$  et soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue sur  $J$ . Alors,

$$\exists ! h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ uniformément continue et telle que } h|_J = g$$

p. 24

## 3. Dérivabilité

### DÉFINITION 12

On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a \in I$  si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe. Lorsque cette limite existe, elle est notée  $f'(a)$ .

p. 71

## REMARQUE 13

- De même,  $f$  est **dérivable à gauche (resp. à droite) en**  $a \in I$  si  $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  existe (resp.  $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  existe). On la note alors  $f'_g(a)$  (resp.  $f'_d(a)$ ).
- Pour  $a \in \overset{\circ}{I}$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$ , avec  $f'_g(a) = f'_d(a)$ .
- $f$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si, quand  $x$  tend vers  $a$ ,

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + (x - a)\ell + o(x - a)$$

## PROPOSITION 14

Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

## CONTRE-EXEMPLE 15

On note  $\Delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  1-périodique et telle que la restriction à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  vérifie  $\Delta(x) = |x|$ . Alors,

$$f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

est bien définie, continue sur  $\mathbb{R}$ , mais dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

p. 86

## REMARQUE 16

La fonction dérivée  $f' : x \mapsto f'(x)$  n'est pas forcément continue là où elle est définie.

p. 72

## EXEMPLE 17

La fonction  $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dérivable, de dérivée  $x \mapsto \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  définie sur  $\mathbb{R}$  mais non continue en 0.

## PROPOSITION 18

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $I$  à valeurs réelles et dérivables en  $a \in I$ . Alors :

- (i)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  et  $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ .
- (ii)  $fg$  est dérivable en  $a$  et  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .
- (iii) Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ .

## DÉFINITION 19

On dit que  $f$  est **de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$**  si  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  (la dérivée  $k$ -ième de  $f$ ) existe et continue.

**PROPOSITION 20****Formule de Leibniz.**

Soit  $a \in I$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $I$  à valeurs réelles et qui admettent une dérivée  $n$ -ième en  $a$ ,

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

**PROPOSITION 21**

Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $g : I \rightarrow J$  est dérivable en  $a$  et si  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $g(a)$ , alors  $f \circ g$  est dérivable en  $a$  et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a) f'(g(a))$$

**COROLLAIRE 22**

Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $h : I \rightarrow J$  une bijection continue sur  $I$  et dérivable en  $a \in I$ . Alors,  $h^{-1}$  est dérivable en  $b = h(a)$  si et seulement si  $h'(a) \neq 0$ , et on a

$$(h^{-1})'(b) = \frac{1}{h'(a)} = \frac{1}{h'(h^{-1}(b))}$$

**COROLLAIRE 23**

La composée de deux applications de classe  $\mathcal{C}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

## II – Fonctions particulières qui sont dérivables ou continues

### 1. Fonctions convexes

**DÉFINITION 24**

$f$  est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

[ROM19-1]  
p. 225

**EXEMPLE 25**

- $x \mapsto |x|$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 26**

Si  $f$  est convexe, elle possède en tout point de  $\overset{\circ}{I}$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur  $\overset{\circ}{I}$ . De plus les applications dérivées à gauche  $f'_g$  et à droite  $f'_d$  sont croissantes avec  $f'_g(x) \leq f'_d(x)$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ .

[GOU20]  
p. 96**PROPOSITION 27**

On suppose  $f$  deux fois dérivable. Alors,  $f$  est convexe si et seulement si  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

**APPLICATION 28****Méthode de Newton.**

Soit  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ll} [c, d] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $g' > 0$ ). Alors :

- (i)  $\exists! a \in [c, d]$  tel que  $g(a) = 0$ .
- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

[ROU]  
p. 152**COROLLAIRE 29**

En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $g$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).
- (ii)  $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$  pour  $x_0 > a$ .

**EXEMPLE 30**

- On fixe  $y > 0$ . En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{y}{x} \right)$  pour un nombre de départ compris entre  $c$  et  $d$  où  $0 < c < d$  et  $c^2 < 0 < d^2$ , on peut obtenir une approximation du nombre  $\sqrt{y}$ .
- En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$  pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## 2. Fonction monotones

### DÉFINITION 31

- On dit que  $f$  est **croissante** si  $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ .
- On dit que  $f$  est **décroissante** si  $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$ .
- On dit que  $f$  est **monotone** si  $f$  est croissante ou décroissante.

[R-R]  
p. 31

### DÉFINITION 32

Si  $a \in \mathring{I}$ , et si  $f$  est discontinue en  $a$  avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que  $f$  a une **discontinuité de première espèce** en  $a$ .

[ROM19-1]  
p. 163

### PROPOSITION 33

Une fonction monotone de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

### THÉORÈME 34

On suppose que  $I$  est un intervalle ouvert. Si  $f$  est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de  $f$  est dénombrable.

### EXEMPLE 35

La fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$  est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

### PROPOSITION 36

Si  $f$  est une fonction monotone telle que  $f(I)$  est un intervalle, elle est alors continue sur  $I$ .

p. 175

### THÉORÈME 37

**Théorème de la bijection monotone.**

Si  $f$  est une application continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :

- (i)  $f(I)$  est un intervalle.
- (ii)  $f^{-1}$  est continue.
- (iii)  $f^{-1}$  est strictement monotone de même sens de variation que  $f$ .

### EXEMPLE 38

La fonction  $\exp : x \mapsto e^x$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_*^+$  qui admet donc une bijection réciproque  $\ln$  qui est strictement croissante.

**THÉORÈME 39****Théorème de Lebesgue.**

Une application monotone est dérivable presque partout.

[D-L]  
p. 405

## III – Propriétés importantes

### 1. Théorème des valeurs intermédiaires

**THÉORÈME 40****Des valeurs intermédiaires.**

On suppose  $f$  continue sur  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

[GOU20]  
p. 41

**REMARQUE 41**

Une autre manière d'écrire ce résultat est la suivante. Si  $f(a) \leq f(b)$  (resp.  $f(a) \geq f(b)$ ) avec  $a < b$ , alors pour tout  $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$  (resp.  $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$ ), il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

**COROLLAIRE 42**

L'image d'un segment de  $\mathbb{R}$  par  $f$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

### 2. Théorème de Rolle

Dans cette partie,  $I$  désigne un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

**THÉORÈME 43****Théorème de Rolle.**

On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors,

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**THÉORÈME 44****Des accroissements finis.**

On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors,

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**COROLLAIRE 45**

On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors,  $f$  est croissante si et seulement si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . De plus,  $f$  est constante si et seulement si  $f'$  est identiquement nulle sur  $]a, b[$ .

**COROLLAIRE 46**

On suppose  $f$  continue sur  $[a, b[$  et dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $\ell = \lim_{t \rightarrow a} f'(t)$  existe. Alors,  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

**THÉORÈME 47**

**Théorème de Darboux.**

On suppose  $f$  dérivable sur  $I$ . Alors  $f'(I)$  est un intervalle.

p. 80

### 3. Formules de Taylor

Dans cette partie,  $I$  désigne encore un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

p. 75

**THÉORÈME 48**

**Formule de Taylor-Lagrange.**

On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  telle que  $f^{(n+1)}$  existe sur  $]a, b[$ . Alors,

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

**APPLICATION 49**

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

### 4. Continuité sur un compact

**THÉORÈME 50**

**des bornes.**

Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

p. 31

**THÉORÈME 51**

**Théorème de Heine.**

Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.



**THÉORÈME 52****Théorème de Bernstein.**

On suppose  $I = [0, 1]$  et  $f$  continue sur  $[0, 1]$ . On note

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors,

$$\|B_n(f) - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

p. 242

**THÉORÈME 53****Théorème de Weierstrass.**

Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions polynomiales.

p. 304

**DEV**

## IV – Régularité des fonctions limites

### 1. Suites et séries de fonctions

**PROPOSITION 54**

Si une suite de fonctions est continue en un point  $a$  et converge uniformément vers une fonction limite, alors celle-ci est continue en  $a$ .

p. 233

**CONTRE-EXEMPLE 55**

La suite de fonctions  $(g_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  par  $g_n(x) = x^n$  converge vers une fonction non continue.

**PROPOSITION 56**

On suppose que  $I$  est un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (i) Il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $(f_n(x_0))$  converge.
- (ii) La suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $g$ .

Alors  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et telle que  $f' = g$ .

**EXEMPLE 57**

La fonction  $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

p. 302

## 2. Fonctions définies par une intégrale

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $g : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$  où  $(E, d)$  est un espace métrique. On pose  $G : t \mapsto \int_X g(t, x) d\mu(x)$ .

[Z-Q]  
p. 312**THÉORÈME 58****Continuité sous le signe intégral.**

On suppose :

- (i)  $\forall t \in E, x \mapsto g(t, x)$  est mesurable.
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto g(t, x)$  est continue en  $t_0 \in E$ .
- (iii)  $\exists h \in L_1(X)$  positive telle que

$$|g(t, x)| \leq h(x) \quad \forall t \in E, \text{ pp. en } x \in X$$

Alors  $G$  est continue en  $t_0$ .

**THÉORÈME 59****Dérivation sous le signe intégral.**

On suppose :

- (i)  $\forall t \in I, x \mapsto g(t, x) \in L_1(X)$ .
- (ii) pp. en  $x \in X, t \mapsto g(t, x)$  est dérivable sur  $I$ . On notera  $\frac{\partial g}{\partial t}$  cette dérivée définie presque partout.
- (iii)  $\forall K \subseteq I$  compact,  $\exists h_K \in L_1(X)$  positive telle que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq h_K(x) \quad \forall t \in I, \text{ pp. en } x$$

Alors  $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \in L_1(X)$  et  $G$  est dérivable sur  $I$  avec

$$\forall t \in I, G'(t) = \int_X \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

## APPLICATION 60

**Intégrale de Dirichlet.**

On pose  $\forall x \geq 0$ ,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

alors :

- (i)  $F$  est bien définie et est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- (ii)  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*^+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .
- (iii)  $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

## Annexes

[GOU20]  
p. 73

| Valeur de $f(x)$           | Valeur de $f'(x)$         |
|----------------------------|---------------------------|
| $x^r \ (r \in \mathbb{R})$ | $rx^{r-1}$                |
| $\ln(x)$                   | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin(x)$                  | $\cos(x)$                 |
| $\cos(x)$                  | $-\sin(x)$                |
| $\tan(x)$                  | $\frac{1}{\cos(x)^2}$     |
| $e^x$                      | $e^x$                     |
| $\arctan(x)$               | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\arcsin(x)$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos(x)$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

FIGURE 1 : Dérivées de fonctions usuelles.

# Bibliographie

## Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

## Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

## Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.

## Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.