

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

On considérera toutes les variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire réelle.

1 Différents modes de convergences

1.1 Convergence L^p

Définition 1 (BL117). Soit $0 < p < \infty$. On dit que $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = 0$ ou de façon équivalente $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$.

Bien def car L^p est complet par thm riesz fischer

Notation 2. On note $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Exemple 3 (no ref). Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire où $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n^\alpha})$ pour tout $n \geq 1$, avec $\alpha > 0$. Pour tout $p > 0$ on a $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{1}{n^\alpha}$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ pour tout $p > 0$ et pour tout $\alpha > 0$.

Proposition 4 (no ref). Soit $0 < q \leq p < \infty$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$

Contre-exemple 5 (HAUC 365). Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ définie par $X_n(w) = \sqrt{n}1_{]0,1/n[}(w)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \leq 1$ on a $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$. Ainsi X_n converge dans L^1 mais pas dans L^2 .

1.2 Convergence p.s.

Définition 6 (BL 109). On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement, abrégé p.s., vers X si

$$\mathbb{P}(w \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w)) = 1$$

Notation 7 (BL 109). On note $X_n \rightarrow X$ p.s. ou encore $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Exemple 8 (HAUC 365). On se place dans l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ définie par $X_n(w) = n1_{]0,1/n[}(w)$ pour tout $w \in [0, 1[$. On a $X_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $X_n(w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout $w \in]0, 1[$. Ainsi $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) = 1$ d'où $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Proposition 9 (KUR 267). [critère de convergence p.s.] $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Proposition 10 (KUR 265). Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on a $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

Notation 11. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants. On écrit $\{A_n \text{ infiniment souvent}\}$ ou $\{A_n \text{ i.s.}\}$ pour $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$

Lemme 12 (BL 93). [DEV1] Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements.

1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$
2. Si $(A_n)_n$ est indépendante, alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$$

Corollaire 13 (BL). [DEV1]

1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
2. Si les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendant, on a :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty, \forall \varepsilon > 0$$

Application 14 (no ref). [DEV1] Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(\text{multiple de } n) = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1.3 Convergence en proba

Définition 15 (BL 113). $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Notation 16 (BL113). On note " $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ " ou " $X_n \rightarrow X$ en probabilité".

Exemple 17 (no ref). Soit $(X_n)_n$ défini par $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n}$. On a donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

1.4 Convergence en loi

Définition 18 (KUR 295). On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée, $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$.

Notation 19. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 20 (KUR p302, bl 122-125). X_n converge en loi vers X ssi $F_{X_n}(x)$ tend vers $F_X(x)$ en tout point x où la fonction de rep est continue.

Exemple 21 (HAU 362). Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires 2 à 2 indépendantes identiquement distribué. Les variables aléatoires ont même fonctions de répartitions et on a donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 22 (KUR 296). Soit g une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. Si la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X , alors la suite $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$.

2 Liens entre les modes de convergences

(cf annexe)

2.1 Convergence L^p et convergence en proba

Proposition 23 (KUR 268). Soit $0 < p < \infty$. La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

Contre-exemple 24. La réciproque de cette propriété est fausse. Reprenons l'exemple 17. On a vu $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Mais $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$ donc X_n ne converge vers X dans L^1 .

2.2 Convergence p.s. et en proba

Proposition 25 (KUR 268). La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Contre-exemple 26. Reprenons la suite de variables aléatoire de l'exemple 3. On a vu que pour tout $\alpha > 0$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ pour tout $0 < p < \infty$. Ainsi, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ pour tout $0 < p < \infty$ et $\alpha > 0$. Or, par le lemme de Borel-Cantelli, $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi pour $\alpha < 1$, X_n ne converge pas presque sûrement vers X . Ceci montre que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Proposition 27 (BL 115 un peu mais pas tout à fait). Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors il existe une sous suite $(X_{n_k})_k$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow{p.s.} X$.

2.3 Convergence L^p et presque sûre

Corollaire 28. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors il existe une sous suite $(X_{n_k})_k$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow{p.s.} X$.

Contre-exemple 29. Reprenons la suite de variables aléatoire de l'exemple 3. On a vu que pour tout $\alpha > 0$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$ pour tout $0 < p < \infty$. Supposons que les $(X_n)_n$ sont indépendants. On montre à l'exemple 26 que pour $\alpha < 1$, X_n ne converge donc pas presque sûrement vers X . Ceci montre que la convergence L^p n'implique pas la convergence presque sûre.

Contre-exemple 30. Reprenons l'exemple 8. On a vu que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$. Or pour tout $n \leq 1$, $\mathbb{E}(X_n^2) = n$ et donc $(X_n)_n$ ne converge pas dans L^2 . Ceci montre que la convergence presque sûre n'implique pas la convergence dans L^p .

2.4 Convergence en proba et en loi

Proposition 31 (KUR 304). La convergence en probabilité implique la convergence en loi

Contre-exemple 32. Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire 2 à 2 indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On a vu dans l'exemple 21 que cette suite converge vers $X \sim \mathcal{B}(p)$. En supposant par l'absurde que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, on trouve que $\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \frac{1}{2})$ tend vers 0 quand n et m tendent vers l'infini. Or $\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \frac{1}{2}) = 2p(1-p)$ si $n \neq m$. Ceci est donc absurde et $(X_n)_n$ ne converge donc pas en probabilité.

Proposition 33 (KUR 304). Si $(X_n)_n$ converge en loi vers une constante a , alors X_n converge vers X en probabilité.

3 Théorèmes limites

3.1 Loi des grands nombres

Théorème 34 (KUR 269). [Loi faible des grands nombres] Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ une suite de variable aléatoires de même loi, admettant un moment d'ordre 2 et deux à deux non corrélés. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ dans L^2 (et donc en probabilité).

Théorème 35 (KUR 270). [loi forte des grands nombres] Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 1. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement.

3.2 Théorème limite central

Théorème 36 (Premier théorème de Lévy, admis). [GAR p306] (X_n) converge en loi vers X ssi ϕ_{X_n} converge vers ϕ_X .

Théorème 37 (GAR 307). [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit (X_n) indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$

Application 38 (DEV 2). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués qui suivent une loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$ et on en déduit

$$n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$