

## Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Revoir blabla historique début FAR ( p129) ; question phare du cours : pour quelles fonctions on peut définir  $\hat{f}$ ? et peut-on construire  $f$  à partir de  $\hat{f}$ ? voir pour déf normes

### 1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Dans cette partie, considérons  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

#### 1.1 Définition et résultats élémentaires

**Définition 1** (FAR 130). La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction notée  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx$ .

**Notation 2** (No ref, ELA F 111). On note  $\check{f}$  (ou  $\check{f}$ ) l'application  $\check{f} : t \mapsto \hat{f}(-t)$

**Exemple 3** (No ref, prémice ex FAR 130). La transformée de Fourier de la fonction  $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$  est  $\hat{f}(t) = 2\text{sinc}(t)$ .

**Proposition 4** (FAR 106). [Riemann-Lebesgue] Si  $f$  est intégrable sur  $]-\alpha, \beta[$ , alors la fonction  $F(\lambda) := \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda x} f(x) dx$  converge vers 0 lorsque  $|\lambda|$  tend vers l'infini.

**Théorème et définition 5** (ELA.F 110).  $\hat{f}$  est continue et bornée par  $\|f\|_1$  (i.e.  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ ).

La transformation de Fourier sur  $L^1$  est l'application de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R})$   $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$

Sa norme est égale à 1, prendre fonction positive pour avoir égalité.

**Proposition 6** (ELA.F 111).  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$  est une application linéaire et continue

**Proposition 7** (No ref). Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ . La transformée de Fourier de  $g : x \mapsto ax + b$  est  $\widehat{g}(t) = \frac{e^{-\frac{itb}{a}}}{a} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$ .

**Exemple 8** (No ref). Soit  $a > 0$  et  $g = \mathbb{1}_{[-a,a]} = f\left(\frac{x}{a}\right)$  où  $f$  est la fonction de l'exemple 3. On a alors  $\hat{g} = 2a \text{sinc}(ta)$

$C_0(\mathbb{R})$  fonctions qui tendent vers 0 à l'infini.

**Proposition 9** (FAR 132). [mettre F à la place de chapeau pour bien voir]

1. Si  $xf \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\mathcal{F}(f)$  est dérivable et  $\mathcal{F}(f)' = \mathcal{F}(-ixf)$ .
2. Si  $f \in C^1$  et si  $f' \in L^1$ , alors  $\mathcal{F}(f') = it\mathcal{F}(f)$

Savoir on peut étendre à dériver k fois

**Notation 10** (ELA F 112). On note  $\bar{f}$  la fonction conjugué de  $f$ ,  $f_{\sigma}$  la fonction  $x \mapsto f(-x)$  et  $\tau_a f$  la fonction  $x \mapsto f(x - a)$  (où  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Proposition 11.** 1.  $\mathcal{F}(f_{\sigma}) = (\mathcal{F}(f))_{\sigma}$

2.  $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}_{\sigma}$

3.  $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$

**Corollaire 12** (ELA F 112). Si  $f$  est paire (resp. impaire) alors  $\hat{f}$  est paire (resp. impaire).

**Exemple 13** (FAR 130). Soit  $\alpha > 0$

1. Si  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$  alors  $\hat{f}(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2}$ .
2. Si  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$  alors  $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ .

## 1.2 Convolution

**Définition 14** (BP 297). Supposons  $f, g$  positives. La convolée de  $f$  et  $g$ , noté  $f * g$  est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\lambda_d(dy)$$

**Proposition 15** (ELA.F 115). Soit  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . On a  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

**Proposition 16** (ELA . F 115). [Formule de dualité] Soit  $g \in L^1$ , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)g(v)dv$$

**Corollaire 17** (PEY 27). [attention aux constantes normalisantes] Soit  $\varphi \in L^1$ . On pose  $\phi = \hat{\varphi}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi_{\delta}(y - x)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\varphi(\delta\xi)d\xi$ .

**Théorème 18** (ELA 127). La tranformation de Fourier de  $L^1$  dans  $C_0$  est injective.

Mais pas surjective (de ces 2 ensembles en tout cas)

## 1.3 Formule d'inversion

**Notation 19**. On considère l'approximation de Poisson  $\varphi_n(x) := \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et on pose  $\phi_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$ .

**Proposition 20**.  $\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \phi_n(t)dt$

**Lemme 21**.  $\varphi_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \phi_n(t) \hat{f}(t)dt$ .

=> image de tranformé de Fourier dense dans  $C_0$

**Théorème 22** (ELA F 116, FAR 133). Si  $\hat{f}$  est intégrable, alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(x)$

En particulier égales dans  $L^1$ . Avoir en tête que très restructif et écarte les fonctions les plus utiles en maths/physiques. Ce theorem entraine que  $f \in L^{\infty}$

**Remarque 23** (No ref ( BON 165), peut -être juste garder en tête). On ne peut pas appliquer Fubini car  $\int_{\mathbb{R}} f(y)dy$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$

**Corollaire 24** (FAR 133). Soient  $f$  une fonction intégrable et  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Si  $\hat{f} \equiv 0$ , alors  $f$  est nulle presque partout.

**Proposition 25** (ELA F 118). Si  $f, \hat{f}, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $fg \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$ .

## 1.4 Théorème d'inversion ponctuelle

**Lemme 26** (DEV 1). On a  $\int_0^{+\infty} sinc(t)dt = \frac{\pi}{2}$ .

**Lemme 27** (FAR 134, DEV 1). Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[0, T]$  admettant une limite à droite en 0 notée  $f(0+)$ . Supposons qu'il existe  $K$  et  $x_0$  tels que, pour tout  $0 < x < x_0$ ,  $|f(x) - f(0+)| \leq Kx$ . Alors  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^T f(x) \frac{sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0+)$ .

**Théorème 28** (FAR 134, DEV 1). Supposons que  $f$  admette en un point  $x$  une limite à gauche  $f(x-)$  et une limite à droite  $f(x+)$ . Supposons de plus qu'il existe  $\eta > 0$  et  $M > 0$  tels que pour  $0 < h < \eta$ ,  $|f(x+h) - f(x+)| \leq Mh$  et  $|f(x-h) - f(x-)| \leq Mh$ . Alors  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{ixt} \hat{f}(t)dt = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ .

## 2 Espace de Schwartz

### 2.1 Définitions et propriétés

**Définition 29** (FAR 135, un peu modif). L'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $f$  de classe  $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telles que pour tout  $p, k \in \mathbb{N}$ ,  $x^p f^{(k)}(x)$  est bornée.

**Exemple 30**.  $x \mapsto e^{-x^2}$  appartient à  $S(\mathbb{R})$ .

**Proposition 31** (ELA F 134). [modif, sev Lp]  $S(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $L^p$ .

**Proposition 32** (ELA F 134). 1.  $S(\mathbb{R})$  est stable par dérivation

2.  $S(\mathbb{R})$  est stable par multiplication par un polynôme

3.  $S(\mathbb{R})$  est stable par produit

## 2.2 Transformation de Fourier et formule d'inversion

**Remarque 33.**  $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$  donc la définition de transformée de Fourier dans  $S(\mathbb{R})$  reste la même.

**Théorème 34** (ELA F 135). L'espace  $S(\mathbb{R})$  est stable par la transformation de Fourier.

**Théorème 35** (ELA F 135). La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est une application linéaire bijective de  $S(\mathbb{R})$  dans lui-même et  $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \check{\mathcal{F}}$ .

C'est même un homéomorphisme.

Existe autres espace où l'on peut def transfo Fourier : sobolev par ex

## 3 Extension à $L^2(\mathbb{R})$

Motivation de la partie : La définition de la transformée de Fourier dans  $L^1$  ne s'applique pas dans  $L^2$ , l'intégrale n'est pas définie. Je crois que l'avantage de  $L^2$  c'est que c'est un Hilbert pas  $L^1$  (ça vérif). On commence en fait la construction dans  $L^1 \cap L^2$  et on étend par densité

### 3.1 Théorème de Plancherel

**Proposition et définition 36** (HOU 524). L'espace  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est naturellement muni d'une structure d'espace hilbertien grâce au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \in L^2(\mathbb{R})^2 \mapsto \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)dt$ . On notera sa norme associée  $\|\cdot\|_2$ .

**Théorème 37** (Plancherel). [PEY 29, ELA F 123, FAR 137, mélange, apprendre formulation!] Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  et on a  $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$

### 3.2 Fonctions de Hermite

**Définition 38** (HOU 515-518). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la  $n$ -ième fonction de Hermite par  $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$  où  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

**Proposition 39** (HOU 515-518). Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a :

1.  $\langle h_n, h_m \rangle = 0$  si  $m \neq n$

2.  $\langle h_n, h_m \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$  si  $m = n$

**Théorème 40** (HOU 515-518). [DEV 1, 2ème point] La famille  $(h_n)_n$  est une famille orthogonale et la famille  $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### 3.3 Transformée de Fourier

TROUVER REEEEEEEF

**Remarque 41.** Les fonctions d'Hermite sont des éléments de  $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . On peut donc appliquer la formule de transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  à  $h_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 42** (No ref). Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier est définie par

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle \widehat{h_n}$$

**Proposition 43** (HOU 520). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction de Hermite  $h_n$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y''(x) - x^2 y(x) = -(2n+1)y(x)$$

**Proposition 44** (PEY 45).  $\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{h_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$

**Théorème 45** (FAR 137). La transformation de Fourier est un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même et  $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \check{\mathcal{F}}$

## 4 Application aux probabilités

### 4.1 Fonction caractéristique

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire réelle.

**Définition 46** (OUV 191). On appelle fonction caractéristique de  $X$  la transformée de Fourier de sa loi  $\mathbb{P}_X$ . Elle est noté  $\varphi_X$ .

**Proposition 47** (EXE p104). Soit deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$ . On a :

$$P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$$

La fonction caractéristique caractérise donc la loi.

Vient de l'injectivité de fourier

**Proposition 48** (OUV p202). Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$

vient de indépendance => loi de la somme est le produit de convolution + résultat transfo fourier sur convolutions

**Exemple 49** (No ref). Si on reprend l'exemple 8, on voit que la fonction caractéristique d'une loi uniforme sur  $[-a, a]$  (où  $a > 0$ ) est  $\varphi_X(t) = \text{sinc}(ta)$ .

**Exemple 50** (DEV 2). Soit  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ . On a alors  $\hat{f}(t) = \varphi_X(t) = e^{-|t|}$ . On en déduit que la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy de paramètre  $a, b$  est  $\phi_X(t) = e^{ita} e^{-|tb|}$

### 4.2 Théorème central limite

**Théorème 51** (Premier théorème de Lévy, admis). [GAR p306]  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  ssi  $\varphi_{X_n}$  converge vers  $\varphi_X$ .

**Théorème 52** (GAR 307). [Pas même énoncé car preuve par <3] Soit  $(X_n)$  indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\sqrt{n} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbb{V}(X_1))$$

Avoir en tête autres applications : équation de la chaleur, formule sommatoire de Poisson

## 5 Références

OUV : ouvrard probabilités 2

ELA F : El Amrani - Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

PEY : Peyrière - Convolution, séries et intégrales de Fourier