

Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemple

On considère $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Notion de série numérique

Définition 1 (ELA 79, GOU 208). On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\sum u_n$ cette série et on appelle somme partielle d'indice n le terme d'indice n de cette suite.

Définition 2 (ELA 80, GOU 208). On dit que $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite s'appelle la somme de la série et on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'indice n l'élément R_n définie par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Définition 3 (NR). Lorsqu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Exemple 4 (GOU 209). 1. Si $a \neq 0$, la série $\sum na$ a pour suite de sommes partielles $(\frac{n(n+1)}{2})_n$ et diverge donc.

2. Si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ a ses sommes partielles qui sont données par $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et est donc une série convergente.

Définition 5 (ELA 81). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit :

1. La série somme comme la série de terme général $u_n + v_n$, noté $\sum(u_n + v_n)$.
2. La série produit par α comme la série de terme général αu_n , noté $\alpha \sum u_n$.

Proposition 6 (ELA 82). Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Contre-exemple 7 (ELA 82). La suite $(u_n := \ln(1 + \frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ converge vers 0, mais $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(k)) = \ln(1+n)$ diverge vers $+\infty$. Ceci montre que la réciproque du théorème précédent n'est pas vraie.

Définition 8 (ELA 82). Lorsque (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Définition 9 (ELA 82). On appelle série télescopique associée à (u_n) la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

Proposition 10 (ELA 82). Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à (u_n) . La série $\sum u_n$ et la suite (u_n) sont de même nature. En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

Exemple 11 (ELA 83). La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ est une série télescopique associée à la suite $(\frac{1}{n})$ et elle converge vers 1.

2 Convergence d'une série numérique

2.1 Premiers critères de convergence

Proposition 12 (GOU 209, ELA 83). [Critère de Cauchy pour les séries] Une série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \leq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_n + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Exemple 13 (ELA 84). Considérons la série harmonique, qui est la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Le critère de Cauchy n'est donc pas vérifié, ce qui montre que cette série diverge.

Définition 14 (ELA 84). $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 15 (ELA 84). Toute série absolument convergente est convergente.

Contre-exemple 16 (ELA 85). Considérons la série de terme général u_n défini par $u_{2p} = \frac{-1}{p}$ et $u_{2p-1} = \frac{1}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes les deux vers 0, donc $(S_n)_n$ converge vers 0. Or $\sum |u_n| = 2 \sum \frac{1}{k}$ n'est pas convergente. Ceci fournit un contre exemple à la réciproque du théorème ci-dessus.

2.2 Séries à termes positifs

Dans cette sous-partie, on considèrera deux séries $\sum u_n, \sum v_n$ de termes réels positifs.

Proposition 17 (ELA 85). $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

Théorème 18 (ELA 86). Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$
2. si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge

Exemple 19 (ELA 86). Pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On a vu à l'exemple 11 que la série de terme général $(n(n-1))^{-1}$ est convergente, on en déduit donc que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 20 (ELA 87). Supposons $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Alors

1. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature
2. En cas de convergence, les restes sont équivalents
3. En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Exemple 21 (Série de Riemann). [A voir où mettre] La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

règle de domination (petit o, grand o) mais pas mettre car trop chargé sinon

Théorème 22 (ELA 91). [Comparaison série intégrale] Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ avec $(n \geq a)$ et l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(t)dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a l'encadrement suivant

$$\int_{n+1}^\infty f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^\infty f(t)dt$$

App à avoir en tête : série de Bertrand

2.3 Règle de Cauchy et de D'Alembert

Need série positif pour dem

Théorème 23 (ELA 95). [Règle de D'Alembert] Supposons $\sum u_n$ à termes non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que $\lambda := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ existe. Alors

1. si $\lambda < 1$, la série converge absolument
2. si $\lambda > 1$, la série diverge.

Exemple 24 (No ref, ELA 103). Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\frac{z^{p+1}}{(p+1)!} \frac{p!}{z^p} = \frac{z}{p+1}$ qui converge vers 0. Ainsi la série de terme général $\frac{z^p}{p!}$ converge. Sa somme est appelée fonction exponentielle, noté $\exp(z)$.

Théorème 25 (ELA 94). [Règle de Cauchy] Supposons $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ existe. Alors :

1. si $L < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
2. si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

3 Étude de séries particulières

3.1 Produit de Cauchy

Dans cette section, on considèrera deux séries $\sum u_n, \sum v_n$.

Définition 26 (ELA 101). Le produit de Cauchy des deux séries est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

Théorème 27 (ELA 101). Supposons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes de sommes S et T . Supposons que l'une est absolument convergente. Alors la série produit est convergente et a pour somme ST . Si les deux séries sont absolument convergentes, la série produit est également absolument convergente.

Application 28 (ELA 103). $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z') \forall z, z' \in \mathbb{C}$

3.2 Séries alternées

Définition 29 (ELA 97). On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n u_n$ si $(u_n)_n$ est de signe constant.

Théorème 30 (critère de Leibniz). Si $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs, décroissants et tendant vers 0, alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple 31 (ELA 97). $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ est alternée et la suite de terme général $\frac{1}{n^{-\alpha}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc elle converge.

Théorème 32 (GOU 215). [Règle d'Abel] Supposons $u_n = \alpha_n v_n$ pour tout $n \leq 0$. Si :

1. (α_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante tendant vers 0,
 2. et $\sum v_n$ est bornée.
- alors, la série $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|R_n| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \right| \leq M a_{n+1}$$

Exemple 33 (GOU 216). $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. En effet, $(n^{-\alpha})_{n \leq 1}$ est positive décroissante tendant vers 0 ; et $\left| \sum_{k=0}^n e^{i\theta k} \right| = \left| \frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{1}{\sin(\theta/2)}$.

3.3 Séries entières

Définition 34 (GOU 247, TL2 572, TAU 35). On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_n$ est une suite de complexe. On dit que a_n est le coefficient d'indice n de la série et que a_0 est le terme constant.

Proposition 35 (lemme d'Abel, que CVA). [GOU 247] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

Proposition 36 (ELA 230). Il existe un unique nombre R tel que :

1. si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument,
2. si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.

[Lien entre prop et déf via la démonstration, je ne sais pas trop comment formuler, revoir si il y a le time.](#)

Définition 37 (ELA 231). La propriété précédente justifie la définition de l'élément

$$R = \sup\{r \in \bar{\mathbb{R}}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

que l'on appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série.

Exemple 38. La série exponentielle définit à l'exemple 24 est une série entière de rayon de convergence infini.

4 Applications

4.1 Combinatoire

[DAN] De nombreux problèmes de combinatoire peuvent se résoudre grâce aux séries entières. En voici deux exemples :

Application 39. Soit n un entier strictement positif. On appelle dérangement du groupe symétrique S_n tout σ de S_n vérifiant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(k) \neq k$. On note d_n le nombre de dérangements de S_n . Par convention $d_0 = 1$. On a $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application 40 (DEV2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ (convention $B_0 = 1$). On a alors $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$

4.2 En probabilité

On considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.

Notation 41. Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements indépendants. On écrit $\{A_n \text{ infiniment souvent}\}$ ou $\{A_n i.s.\}$ pour $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$

Théorème 42 (BL 93). [lemme de Borel Cantelli DEV1] Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.

1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n i.s.) = 0$
2. Si $(A_n)_n$ est indépendante, alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(A_n i.s.) = 1$$

Proposition 43. [DEV1] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On a que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge. (Avec suite des restes diverge)

Application 44 (DEV 1). Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(\text{multiple de } n) = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 45 (GOU 337). On dit que X admet une espérance si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on appelle espérance de X la valeur notée $\mathbb{E}(X)$ définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Exemple 46. Si $X \sim \mathcal{G}(p), p \in]0, 1[$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$