

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Soit D_f un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in D_f$.

1 Continuité

1.1 Généralités

Définition 1 (TL1). On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ au point a si pour toute suite $(x_n)_n$ prenant ses valeurs dans $D_f \setminus \{a\}$ et de limite a , la suite $(f(x_n))_n$ tend vers ℓ . Cette limite est unique et on la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemple 2 (TL1 622). $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$: pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de limite 0, comme la suite $\sin \frac{1}{x_n}$ est bornée, $(x_n \sin \frac{1}{x_n})_n$ tend vers 0, d'où le résultat.

Définition 3 (TL1 631). On dit que f est continue au point a si $a \in D_f$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition 4 (TL1 632). [caractérisation] Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Définition 5 (TL1 631). On dit que f est continue sur un intervalle (ou plus généralement un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$) si elle est continue en tout point $a \in I$.

Théorème 6 (TL2 634). [des valeurs intermédiaires]

1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors pour toute valeur γ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.
2. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. (cf Annexe!!!!)

Corollaire 7 (TL2 635). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 8 (TL1 638). Continue sur segment $\implies$ bornée et atteint ses bornes

1.2 Opération sur les fonctions continues

Proposition 9 (TL1 633). Soient f, g continues en a . Alors $f + g$, $f - g, fg$ sont continues en a . De plus, si $g(a) \neq 0$, f/g est également continue en a .

Proposition 10 (TL1 633). Supposons f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$ telle que $f(D_f) \subset D_g$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

Méthode 11. Permet de connaître continuité à partir des fonctions de ref (tableau annexe ?)

Exemple 12 (No ref, juste inventer à partir fonctions usuelles du tableau). $x \mapsto \frac{\sin(\ln(|x|+1))}{3+\exp(\frac{1}{x^2}+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.3 Uniforme continuité

Définition 13 (TL2 488). Une application $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ est dite uniformément continue si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \forall y \in X, (d(x, y) \leq \alpha) \implies (d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$$

Proposition 14 (TL2 489). lipschitzienne $\implies$ uniformément continue $\implies$ continue.

Théorème 15 (TL2 489). [Heine] Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue

Exemple 16 (TL2 489). $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.
Pas lipschitz car dérivée pas bornée sur $]0, 1[$

2 Dérivabilité

2.1 Fonctions dérivables

Définition 17 (TL1 640). On dit que f est dérivable au point a si la fonction taux d'accroissement $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ définie sur $D_f \setminus \{a\}$ admet une limite lorsque x tend vers a .

Cette limite est appelée dérivée de f au point a et est notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

On considère désormais que $D_f = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et a un point intérieur à I .

Définition 18 (TL1 641, prendre 2e def). On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) existe. On la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Proposition 19 (TL1 641). f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple 20 (TL1 641). $x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche de 0, mais ces dérivées ne coïncident pas donc elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 21. Si f est dérivable au point a , alors f est continue au point a .

Définition 22 (TL1 641). f est dérivable sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout $a \in I$.

Exemple 23. On retrouve le tableau des dérivées des fonctions usuelles en annexe.

Définition 24 (TL1 644). On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la notion de fonction dérivée d'ordre n de f sur I . On note $f^{(0)} = f$. On suppose connu la dérivée $(n-1)$ ième $f^{(n-1)}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On dit que f admet une fonction dérivée d'ordre n sur I si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I .

On note alors $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ et on dit que f est n fois dérivable sur I .

Définition 25 (TL1 645). On dit que f est de classe C^n sur I si elle admet une dérivée d'ordre n et si cette dérivée est continue. On dit qu'elle est de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Opérations sur les dérivées

On considère f, g deux fonctions dérivables au point a .

Proposition 26 (TL1 642). $f + \lambda g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a) + \lambda g'(a)$.

Proposition 27 (TL1 642). fg est dérivable en a de dérivée $f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.

Proposition 28 (TL1 642). Si $g(a) \neq 0$, f/g est dérivable en a de dérivée $\frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$

Proposition 29 (TL1 642). Si $f : I \rightarrow J$ est dérivable en a et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a : $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$

Proposition 30 (TL1 645). Si f et g sont $n \in \mathbb{N}$ fois dérivables sur I , alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Proposition 31 (TL1 645). Si f et g sont $n \in \mathbb{N}$ fois dérivables sur I , alors la fonction fg est n fois dérivable sur I et l'on a :

$$(fg)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}$$

Exemple 32 (TL2 644). La dérivée de $x \mapsto \sin(2x+1)$ en a est $2\cos(2a+1)$. Celle de $x \mapsto e^{-x^2}$ en a est $-2ae^{-a^2}$

2.3 Étude d'une fonction

Théorème 33 (TL2 648). [Rolle] Soit f continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. (cf annexe)

Théorème 34 (TL1 648). [des accroissements finis] Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Proposition 35 (TL1 649 / 650, **attention dans le livre avant dit qu'on ne peut pas déduire ça comme ça, cf la démo**). Si f est dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I , alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$
2. f est décroissante sur I si et seulement si, $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
3. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f' < 0$) pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Contre-exemple 36 (TL1 647). La réciproque de 3) est fautive, on peut le voir avoir $f : x \mapsto x^3$ puisque $f'(0) = 0$, cependant cette fonction est strictement croissante.

Méthode 37 (No ref). Le théorème nous permet donc d'avoir une méthode pour déterminer les variations d'une fonction. On se ramène alors à étudier le signe de sa dérivée. On peut placer le tout dans un tableau, appelée tableau de variation, dont une ligne est consacrée au signe de la dérivée et une deuxième est consacrée aux variations de la fonction.

Exemple 38 (No ref). Étudions les variations de la fonction $h(x) = x^3 - 3x$. Sa dérivée est $3x^2 - 3$. Cette dérivée est positive sur les intervalles $] - \infty, -1]$ et $[1, \infty[$. La restriction de f à l'un de ces intervalles est donc positive. De même, h' est négative sur $[-1, 1]$ donc la fonction est décroissante sur cet intervalle. Le tableau de variation de cette fonction est donnée en annexe 3.

2.4 Les formules de Taylor

Théorème 39 (TL1 652). [Taylor Lagrange] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et dont la dérivée $(n+1)$ ème existe sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Avoir en tête les inégalités de Kolmogorov comme application

Théorème 40 (TL1 656). [Taylor Young, remplacer par petit o, cf GOU] Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois continûment dérivable sur un intervalle I . Alors, pour tout point $a \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x)$ où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_n(x) = 0$

Exemple 41. Pour x proche de 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

3 Etudes de certaines fonctions

3.1 Fonction convexe

Définition 42 (TL2 529). La fonction f est dite convexe si, pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a : $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Si cette inégalité est stricte dès que $x \neq y$ et $\lambda \neq 0, 1$, on dit que f est strictement convexe.

Proposition 43 (TL2 529). [différent de 2)1) car ici pas hypothèse différentiable] Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au dessous de chacune de ses cordes.

Interprétation géométrique 44 (ROU 120, TL2 259, [A voir](#)). Si $E = \mathbb{R}$ cela revient à dire que f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus des tangentes. (cf annexe 6)

Exemple 45 (TL2 529). La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (cf annexe 6).

Proposition 46 (TL1 661, TL2 529, ssi (juste 1 inég suffit)). Une fonction f est convexe si et seulement si pour tous $x < y < z$, $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. (cf annexe 5)

Corollaire 47 (TL1 667, TL2 531). [juste 2è point, premier déjà en haut] Supposons f deux fois dérivable. f est convexe si et seulement si f'' est positif.

Application 48 (ROU 144). [méthode de Newton, [DEV 1](#)] Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \leq 0$. Alors, f a un unique zéro a et on a :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique.
2. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$, alors pour tout $x_0 \in]a, d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$. (cf annexe 7).

3.2 Fonction dépendant d'un paramètre

Dans ce qui suit, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsqu'elle sera bien définie, on désignera par F la fonction $t \in E \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$.

Proposition 49 (ZQ 312, [CHANGER CAS réelle TL2 720](#)). Supposons que :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable
2. pour presque tout $x \in E$ la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur E ,
3. pour tout compact K de E il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive indépendante de t telle que : $|f(t, x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, presque partout en x .

Alors le fonction F est bien définie et continue sur E .

Théorème 50 (ZQ 316, [CHANGER CAS réelle TL2 722](#)). On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que :

1. Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est dans $L^1(X)$
2. La fonction $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I pour presque tout $x \in I$. (On notera $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$ sa dérivée).
3. Pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t , telle que pour presque tout $x \in I$ $|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$.

Alors :

1. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$ est dans $L^1(X)$
2. la fonction F est dérivable sur I et $\forall t \in I$, $F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) d\mu(x)$.

Exemple 51 ([DEV2](#)). Calcule de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) dt$. (intégrale de Dirichlet)