

218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

I – Énoncés des formules de Taylor

1. En dimension 1

Dans cette partie, I désigne un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$ une application.

Dans un premier temps, supposons $E = \mathbb{R}$.

[GOU20]
p. 73

THÉORÈME 1

Théorème de Rolle.

On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

THÉORÈME 2

Formule de Taylor-Lagrange.

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

APPLICATION 3

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

On ne suppose plus $E = \mathbb{R}$. Le Théorème 1 n'est plus forcément vrai, mais on a tout de même le résultat suivant.

THÉORÈME 4

Inégalité des accroissements finis.

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose f et g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in]a, b[$ on a $\|f'(t)\| \leq g'(t)$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (g(b) - g(a))$$

COROLLAIRE 5**Inégalité de Taylor-Lagrange.**

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in]a, b[, \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors,

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

THÉORÈME 6**Formule de Taylor-Young.**

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I telle que $f^{(n+1)}(x)$ existe pour $x \in I$. Alors, quand $h \rightarrow 0$, on a

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

APPLICATION 7**Théorème de Darboux.**

On suppose f dérivable sur I . Alors $f'(I)$ est un intervalle.

p. 80

THÉORÈME 8**Formule de Taylor avec reste intégral.**

On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

p. 77

2. En dimension supérieure

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

p. 328

NOTATION 9

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Par analogie avec

$$\forall (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m, (a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$$

on note

$$\left(\sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^{(n)} = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} f(a)$$

THÉORÈME 10**Formule de Taylor-Lagrange.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors, $\exists \theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \frac{1}{p!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h) \right)^{(p)}$$

EXEMPLE 11

Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} f(\theta h, \theta k) + h k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} f(\theta h, \theta k) \right) \\ &+ o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

THÉORÈME 12**Formule de Taylor avec reste intégral.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right)^{(k)} dt$$

THÉORÈME 13**Formule de Taylor-Young.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + o(\|h\|^k)$$

APPLICATION 14**Lemme d'Hadamard.**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose f différentiable en 0 avec $df_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

où $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

II – Applications en analyse réelle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow E$ une application.

1. Étude asymptotique de fonctions

On suppose $0 \in I$.

p. 89

DÉFINITION 15

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

REMARQUE 16

On pourrait de même définir les développements limités au voisinage d'un point $a \in \bar{I}$.

PROPOSITION 17

- (i) Un développement limité, s'il existe, est unique.
- (ii) Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \geq 1$, f est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut a_1 .
- (iii) Si f est paire (resp. impaire), les coefficients du développement limité d'indice impair (resp. pair) sont nuls.
- (iv) Si f est $n \geq 2$ fois dérivable en 0, f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} + o(x^{n-1})$.
- (v) Si f est dérivable sur I si f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$; alors, f admet un développement limité en 0 donné par $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.
- (vi) Les règles de somme, produit, quotient et composition obéissent aux mêmes règles que pour les polynômes (sous réserve de bonne définition).

On déduit du Théorème 6 le résultat suivant.

PROPOSITION 18

Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

EXEMPLE 19

En 0, on a les développements limités usuels suivants.

- $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

APPLICATION 20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = -2$$

APPLICATION 21

Développement asymptotique de la série harmonique.

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[I-P]
p. 380

2. Développements en série entière

DÉFINITION 22

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière en $a \in U$** s'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $D(a, r) \subseteq U$ et

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

[BMP]
p. 46

EXEMPLE 23

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\forall z \in D(0, |z_0|), \frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n}$$

[GOU20]
p. 251

Nous nous limiterons ici aux fonctions réelles.

PROPOSITION 24

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définie par

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

tende simplement vers 0 sur $] -\alpha, \alpha[$. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $] -\alpha, \alpha[$.

REMARQUE 25

Dans la pratique, pour montrer que le (R_n) précédent tend simplement vers 0, on peut l'exprimer comme un reste de Taylor (Lagrange ou intégral).

EXEMPLE 26

On a les développements en série entière usuels suivants.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

CONTRE-EXEMPLE 27

La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$, vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n , mais ne coïncide pas avec la somme de $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ sur $] -\alpha, \alpha[$ pour tout $\alpha > 0$.

CONTRE-EXEMPLE 28

On considère fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

Alors g est $\mathcal{C}^\infty$, vérifie $g^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$ pour tout entier n , et $\sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence nul.

THÉORÈME 29**Théorème de Bernstein.**

Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose les dérivées de f positives sur $] -a, a[$. Alors f est développable en série entière sur $] -a, a[$.

[ROM18]
p. 302**3. Méthode de Newton**

DEV

THÉORÈME 30**Méthode de Newton.**

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c, d] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

- (i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.
- (ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ .
- (iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

[ROU]
p. 152**COROLLAIRE 31**

En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

- (i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).
- (ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

EXEMPLE 32

- On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.
- En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Majoration d'une erreur d'approximation

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$. On se donne $n + 1$ points $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts deux-à-deux.

[DEM]
p. 21

DÉFINITION 33

Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le i -ième **polynôme de Lagrange** associé à $x_0, \dots, x_n$ par

$$\ell_i : x \mapsto \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

THÉORÈME 34

Il existe une unique fonction polynomiale p_n de degré inférieur ou égal à n telle que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_n(x_i) = f(x_i)$:

$$p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$$

THÉORÈME 35

On note $\pi_{n+1} : x \mapsto \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ et on suppose f $n + 1$ fois dérivable $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi_x \in]\min(x, x_0, \dots, x_n), \max(x, x_0, \dots, x_n)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

COROLLAIRE 36

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

APPLICATION 37

Calculs approchés d'intégrales.

On note $I(f) = \int_a^b f(t) dt$. L'objectif est d'approximer $I(f)$ par une expression $P(f)$ et de majorer l'erreur d'approximation $E(f) = |I(f) - P(f)|$.

(i) Méthode des rectangles. On suppose f continue. Avec $P(f) = (b-a)f(a)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|_\infty$.

(ii) Méthode du point milieu. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Avec $P(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$.

(iii) Méthode des trapèzes. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

(iv) Méthode de Simpson. On suppose f de classe $\mathcal{C}^4$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty$.

[DAN]
p. 506

III – Application aux fonctions de plusieurs variables

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Homéomorphismes

LEMME 38

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]
p. 209

LEMME 39

Lemme de Morse.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$.
- La matrice symétrique $H(f)_0$ est inversible.
- La signature de $H(f)_0$ est $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

EXEMPLE 40

On considère $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

p. 334

2. Conditions d'extrema

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

THÉORÈME 41

On suppose $df_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors :

- (i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a , $\text{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).
- (ii) Si $\text{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .

[GOU20]
p. 336

EXEMPLE 42

On suppose $df_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{i+j=2}$. Alors :

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .
- (ii) Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- (iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

EXEMPLE 43

La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

CONTRE-EXEMPLE 44

$x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

IV – Application en probabilités

THÉORÈME 45

Théorème de Lévy.

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

où ϕ_Y désigne la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y .

[Z-Q]
p. 544

THÉORÈME 46

Central limite.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$. Alors,

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]
p. 307

APPLICATION 47**Théorème de Moivre-Laplace.**

On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

APPLICATION 48**Formule de Stirling.**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 556

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Analyse numérique et équations différentielles

[DEM]

Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. 4^e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.
<https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.