

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Sauf mention contraire, nous travaillerons sur l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$. Soient F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

I – Généralisation de la notion de dérivée

1. Différentielle

DÉFINITION 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soient $U \subseteq E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ une application de U dans F . f est dite **différentiable** en un point a de U s'il existe $\ell_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + \ell_a(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Si ℓ_a existe, alors elle est unique et on la note df_a : c'est la **différentielle** de f en a .

[GOU20]
p. 323

REMARQUE 2

- En dimension quelconque df_a dépend a priori des normes choisies sur E et F . Cependant, en dimension finie, l'équivalence des normes implique que l'existence et la valeur de df_a ne dépendent pas des normes choisies.
- La définition demande à ℓ_a d'être continue. En dimension finie, le problème ne se pose donc pas.
- Une fonction réelle est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a . Dans ce cas, on a $df_a : h \mapsto f'(a)h$.

EXEMPLE 3

Si f est linéaire et continue, alors $df_a = f$ pour tout $a \in E$.

PROPOSITION 4

Une fonction différentiable en un point et continue en ce point.

PROPOSITION 5

Soit $V \subseteq F$ un ouvert. Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable en un point a de U .

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en a , et $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$.
- (ii) Si $g : U \rightarrow F$ est différentiable en a , alors $f + g$ l'est aussi, et $d(f + g)_a = df_a + dg_a$.
- (iii) Soit $g : V \rightarrow G$. On suppose $f(U) \subseteq V$ et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et, $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

2. Dérivée selon un vecteur

DÉFINITION 6

Soit $a \in U$.

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction de la variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on dit que f est **dérivable en a selon le vecteur v** . On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(0)$$

- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On dit que f admet une **i -ième dérivée partielle en a** si f est dérivable en a selon le vecteur e_i . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$$

p. 324

REMARQUE 7

Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est aussi la dérivée de l'application partielle $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ en $t = 0$.

PROPOSITION 8

Une fonction différentiable en un point est dérivable selon tout vecteur en ce point.

CONTRE-EXEMPLE 9

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est dérivable selon tout vecteur au point $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

p. 329

THÉORÈME 10

Si toutes les dérivées partielles de f existent et si elles sont continues en un point a de U , alors f est différentiable en a et on a

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où $(e_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est la base duale de la base canonique $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\mathbb{R}^n$.

p. 325

CONTRE-EXEMPLE 11

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f : (x, y) &\mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est différentiable en 0, mais f' n'est pas continue en 0.

COROLLAIRE 12

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. On note par f_i la i -ième coordonnée de f $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Alors la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est

$$\text{Jac}(f)_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$$

p. 327

DÉFINITION 13

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. La matrice $\text{Jac}(f)_a$ est la **jacobienne** de f en a . Son déterminant est le **jacobien** de f en a .

EXEMPLE 14

Soit $f : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors $\det(\text{Jac}(f)_{(r, \theta)}) = r$.

p. 354

THÉORÈME 15

Inégalité des accroissements finis.

Soit $f : U \rightarrow F$ continue sur un segment $[a, b] \subseteq U$ et différentiable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|df_c\| \leq M$ pour tout $c \in]a, b[$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \quad (*)$$

p. 327

COROLLAIRE 16

En reprenant les notations du théorème précédent :

(i) Si U est convexe, si f est différentiable sur U et si $\|df_c\| \leq M$ pour tout $c \in U$, alors l'inégalité (*) précédente est vraie pour tout $a, b \in U$.

(ii) Si U est un ouvert connexe et $df_c = 0$ pour tout $c \in U$, alors f est constante.

3. Différentielle itérée

DÉFINITION 17

Soit $f : U \rightarrow F$. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une dérivée partielle d'ordre p par la relation

$$\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}} f \right)$$

f est alors dite de classe $\mathcal{C}^p$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U .

EXEMPLE 18

La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$.

p. 79

THÉORÈME 19

Théorème de Schwarz.

On se place dans la cas $n = 2$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles sur U , continues en $a \in U$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

p. 326

COROLLAIRE 20

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^p$. Alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

NOTATION 21

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Par analogie avec

$$\forall (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m, (a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$$

on note

$$\left(\sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^{(n)} = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} f(a)$$

THÉORÈME 22**Formule de Taylor-Lagrange.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors, $\exists \theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \frac{1}{p!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h) \right)^{(p)}$$

EXEMPLE 23

Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} f(\theta h, \theta k) + h k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} f(\theta h, \theta k) \right) \\ &+ o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

THÉORÈME 24**Formule de Taylor avec reste intégral.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right)^{(k)} dt$$

THÉORÈME 25**Formule de Taylor-Young.**

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + o(\|h\|^k)$$

APPLICATION 26**Lemme d'Hadamard.**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose f différentiable en 0 avec $df_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

où $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

II – Théorèmes fondamentaux

1. Inversion locale

DÉFINITION 27

Soit $f : U \rightarrow F$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe $\mathcal{C}^k$ de U sur $V = f(U)$ si f et f^{-1} sont bijectives et de classe $\mathcal{C}^k$ respectivement sur U et V .

[ROU]
p. 54

EXEMPLE 28

$x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme.

THÉORÈME 29

Inversion locale.

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a est inversible.

Alors, il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur W .

[GOU20]
p. 341

REMARQUE 30

Si $F = \mathbb{R}^n$, df_a est inversible si et seulement si le jacobien de f en a , $\det \text{Jac}(f)_a$, est non nul.

COROLLAIRE 31

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $a \in U$, df_a est inversible. Alors f est une application ouverte.

EXEMPLE 32

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

p. 347

APPLICATION 33

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. On pose $V = \varphi(U)$. Alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De plus, pour toute fonction mesurable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$f \in L^1(V) \iff (y \mapsto f(\varphi(y)) |\det \text{Jac } \varphi(y)|) \in L^1(U).$$

Dans ce cas,

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) |\det \text{Jac } \varphi(y)| dy.$$

[BMP]
p. 9

EXEMPLE 34

En passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

[GOU20]
p. 355

APPLICATION 35

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. Alors, si A est suffisamment proche de l'identité I_n , A est une racine k -ième (ie. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$).

[BMP]
p. 9**LEMME 36**

- (i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (ii) $\exp$ est différentiable en 0 et $d\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
- (iii) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

[I-P]
p. 396**THÉORÈME 37**

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

APPLICATION 38

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

DEV

2. Fonctions implicites

DÉFINITION 39

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ouvert où $E = E_1 \times \dots \times E_n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Soit $f : \Omega \rightarrow F$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est définie sur un voisinage de a_i dans E_i . Si elle est différentiable en a_i , on dit que f admet une **différentielle partielle** d'indice i en a , et on note celle-ci $\partial_i f_a$.

[GOU20]
p. 344**REMARQUE 40**

En reprenant les notations précédentes :

- Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = \mathbb{R}$ et $F = E = \mathbb{R}^n$, alors $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- Si f est différentiable en a , alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\partial_i f_a$ existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E, df_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i)$$

THÉORÈME 41**des fonctions implicites.**

Soient $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ où U et V sont des ouverts. Soit $f : U \times V \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f_{(a,b)} : \mathbb{R}^m \rightarrow F$ est un isomorphisme. Alors, il existe :

- Un voisinage ouvert U_0 de a dans U .
- Un voisinage ouvert W de $f(a, b)$.
- Un voisinage ouvert Ω de (a, b) dans $U \times V$.
- Une fonction $\varphi : U_0 \times W \rightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0, \forall z \in W, \exists ! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W, f(x, \varphi(x, z)) = z$$

REMARQUE 42

Avec les notations précédentes, si $E = F = \mathbb{R}$, on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

[BMP]
p. 11

REMARQUE 43

La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction φ .

[ROU]
p. 193

PROPOSITION 44

Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite φ est donnée par :

$$d\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x, \varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x, \varphi(x))})$$

EXEMPLE 45

Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\partial_2 f_{(x,y)} = 2y$. On exclut les points où $y = 0$. En prenant $(0, 1)$ et $(0, -1)$ pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

- $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

De plus, en dérivant par rapport à x : $2x + 2yy' = 0$ et, $y' = \varphi'_1(x) = \frac{-x}{y}$.

III – Application aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Gradient, hessienne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en un point a de U .

[GOU20]
p. 324

DÉFINITION 46

df_a est une forme linéaire, et le théorème de représentation de Riesz donne l'existence d'un unique vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, df_a(h) = \langle v, h \rangle$$

Le vecteur v s'appelle **gradient** de f , et est noté ∇f_a .

PROPOSITION 47

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et,

$$\nabla f_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose pour la suite f de classe $\mathcal{C}^2$.

p. 336

DÉFINITION 48

La matrice **hessienne** de f en a , notée $\text{Hess}(f)_a$, est définie par

$$\text{Hess}(f)_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

REMARQUE 49

Pour f de classe $\mathcal{C}^2$, $\text{Hess}(f)_a$ est symétrique.

THÉORÈME 50

On suppose $df_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors :

- (i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a , $\text{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).
- (ii) Si $\text{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .

EXEMPLE 51

On suppose $df_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{i+j=2}$. Alors :

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .
- (ii) Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- (iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

EXEMPLE 52

La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

CONTRE-EXEMPLE 53

$x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

2. Homéomorphismes

LEMME 54

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]
p. 209

LEMME 55**Lemme de Morse.**

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$.
- La matrice symétrique $H(f)_0$ est inversible.
- La signature de $H(f)_0$ est $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

DEV

EXEMPLE 56

p. 334

On considère $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

3. Optimisation

THÉORÈME 57

[GOU20]
p. 337

Extrema liés.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe un unique r -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tel que

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

DÉFINITION 58

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

REMARQUE 59

[BMP]
p. 21

La relation finale du Théorème 57 équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(df_a)$$

et elle exprime que df_a est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

CONTRE-EXEMPLE 60

On pose $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x, y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 57 n'est pas vraie.

APPLICATION 61**Théorème spectral.**

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base ortho-normée.

APPLICATION 62

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\mathrm{trace}({}^t M M)}$ (ie. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

p. 35

APPLICATION 63**Inégalité arithmético-géométrique.**

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

[GOU20]
p. 339**APPLICATION 64****Inégalité d'Hadamard.**

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, |\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si l'un des x_i est nul ou si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

[ROU]
p. 409

Annexes

[BMP]
p. 10

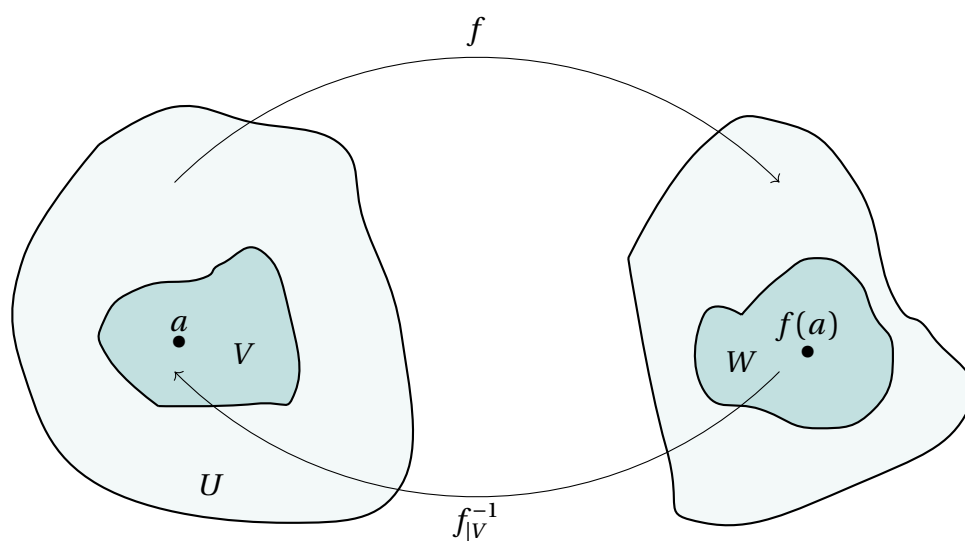


FIGURE 1 : Inversion locale.

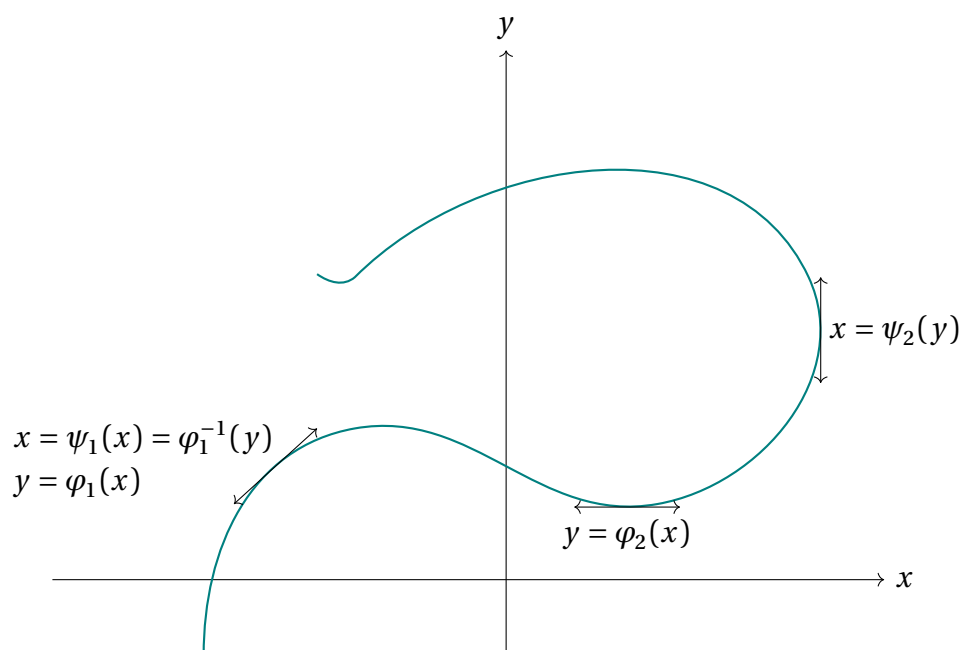


FIGURE 2 : Fonctions implicites.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.