

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Soient E et F deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert.

I – Théorème d'inversion locale

1. Difféomorphisme

Pour une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et

[GOU20]
p. 341

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

L'objectif ici va être de généraliser ce résultat.

DÉFINITION 1

Soit $f : U \rightarrow F$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe $\mathcal{C}^k$ de U sur $V = f(U)$ si f et f^{-1} sont bijectives et de classe $\mathcal{C}^k$ respectivement sur U et V .

[ROU]
p. 54

PROPOSITION 2

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Soit $f : U \rightarrow F$ un difféomorphisme. Alors :

(i) Pour tout $x \in U$, en posant $y = f(x)$,

$$d(f^{-1})_y \circ df_x = \text{id}$$

(ii) $n = p$.

EXEMPLE 3

$x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme.

2. Énoncé

THÉORÈME 4

Inversion locale.

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a est inversible.

Alors, il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur W .

[GOU20]
p. 341

REMARQUE 5

Si $E = F = \mathbb{R}^n$, df_a est inversible si et seulement si le jacobien de f en a , $\det \text{Jac}(f)_a$, est non nul.

COROLLAIRE 6

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $a \in U$, df_a est inversible. Alors f est une application ouverte.

EXEMPLE 7

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

p. 347

APPLICATION 8

On suppose $E = \mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. On pose $V = \varphi(U)$. Alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De plus, pour toute fonction mesurable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$f \in L^1(V) \iff (y \mapsto f(\varphi(y)) |\det \text{Jac } \varphi(y)|) \in L^1(U).$$

Dans ce cas,

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) |\det \text{Jac } \varphi(y)| dy.$$

[BMP]
p. 9

EXEMPLE 9

En passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

[GOU20]
p. 355

APPLICATION 10

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. Alors, si A est suffisamment proche de l'identité I_n , A est une racine k -ième (ie. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$).

[BMP]
p. 9

3. Généralisation

THÉORÈME 11

Inversion globale.

Soit $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = f(U)$ si et seulement si f est injective sur U et df_a est un isomorphisme pour tout $a \in U$.

p. 13

EXEMPLE 12

L'application de l'Exemple 7 n'est pas un difféomorphisme global.

[GOU20]
p. 347

REMARQUE 13

Il existe une version holomorphe de ce théorème :

[ROU]
p. 191

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U . On suppose f injective sur U . Alors, $V = f(U)$ est un ouvert (connexe) de $\mathbb{C}$ et f est un difféomorphisme holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V .

Remarquons que seule l'injectivité de f suffit.

THÉORÈME 14

du rang constant.

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que le rang de df_x est constant égal à $r \leq n$ pour tout $x \in U$. Soit $a \in U$. Alors, il existe V voisinage de a , W voisinage de $f(a)$ et deux difféomorphismes $\phi : V \rightarrow V$ et $\psi : W \rightarrow W$ tels que

$$\phi \circ f \circ \psi = \pi_r$$

où π_r désigne la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^r : \pi_r : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, 0, \dots, 0)$.

p. 231

II – Théorème des fonctions implicites

1. Énoncé

DÉFINITION 15

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ouvert où $E = E_1 \times \dots \times E_n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Soit $f : \Omega \rightarrow F$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est définie sur un voisinage de a_i dans E_i . Si elle est différentiable en a_i , on dit que f admet une **différentielle partielle** d'indice i en a , et on note celle-ci $\partial_i f_a$.

[GOU20]
p. 344

REMARQUE 16

En reprenant les notations précédentes :

- Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = \mathbb{R}$ et $F = E = \mathbb{R}^n$, alors $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- Si f est différentiable en a , alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\partial_i f_a$ existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E, df_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i)$$

THÉORÈME 17

des fonctions implicites.

Soient E, F, G trois espaces de Banach. Soient $U \times V \subseteq E \times F$ où U et V sont des ouverts. Soit $f : U \times V \rightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f_{(a,b)} : F \rightarrow G$ est un isomorphisme. Alors, il existe :

- Un voisinage ouvert U_0 de a dans U .
- Un voisinage ouvert W de $f(a, b)$.
- Un voisinage ouvert Ω de (a, b) dans $U \times V$.
- Une fonction $\varphi : U_0 \times W \rightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0, \forall z \in W, \exists ! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W, f(x, \varphi(x, z)) = z$$

REMARQUE 18

Avec les notations précédentes, si $E = F = \mathbb{R}$, on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

[BMP]
p. 11

REMARQUE 19

La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction φ .

[ROU]
p. 193

PROPOSITION 20

Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite φ est donnée par :

$$d\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x, \varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x, \varphi(x))})$$

2. Exemples

EXEMPLE 21

Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\partial_2 f_{(x,y)} = 2y$. On exclue les points où $y = 0$. En prenant $(0, 1)$ et $(0, -1)$ pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

- $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

De plus, en dérivant par rapport à x : $2x + 2yy' = 0$ et, $y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{y}$.

EXEMPLE 22

Folium de Descartes.

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. En tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})\}$, C peut être vu comme le graphe d'une fonction φ telle que

$$\varphi'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$$

p. 237

EXEMPLE 23

Soit $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$. Alors, il existe U, V deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}$, $y = \varphi(x) \in V$ est l'unique solution de $f(x, y) = 0$. De plus, on a un développement limité de φ :

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - x^9 - \frac{x^{10}}{40} + o(x^{11})$$

[GOU20]
p. 348

III – Applications

1. Homéomorphismes

LEMME 24

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]
p. 209

DEV

LEMME 25

Lemme de Morse.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$.
- La matrice symétrique $\text{Hess}(f)_0$ est inversible.
- La signature de $\text{Hess}(f)_0$ est $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

EXEMPLE 26

On considère $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

p. 344

APPLICATION 27

Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique d^2f_0 non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 :

- (i) Si d^2f_0 est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.
- (ii) Si d^2f_0 est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.
- (iii) Si d^2f_0 est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

p. 341

APPLICATION 28

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $df_0 = 0$ et d^2f_0 est définie positive. Alors 0 est un minimum local (strict) de f .

[BMP]
p. 15

2. Optimisation

THÉORÈME 29

Extrema liés.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe un unique r -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tel que

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

[GOU20]
p. 337

DÉFINITION 30

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

REMARQUE 31

La relation finale du Théorème 29 équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(df_a)$$

et elle exprime que df_a est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

[BMP]
p. 21

CONTRE-EXEMPLE 32

On pose $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x, y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 29 n'est pas vraie.

APPLICATION 33

Théorème spectral.

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base ortho-normée.

APPLICATION 34

$$\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \text{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{trace}({}^t M M)}$ (ie. $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

p. 35

APPLICATION 35

Inégalité arithmético-géométrique.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

[GOU20]
p. 339

APPLICATION 36

Inégalité d'Hadamard.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, |\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si l'un des x_i est nul ou si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

[ROU]
p. 409

3. Régularité des racines d'un polynôme

PROPOSITION 37

Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine simple de P_0 . Alors, il existe φ une application $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 telle que

$$\forall P \in U, \forall x \in V, x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$$

[BMP]
p. 11

APPLICATION 38

Soit $\mathcal{S}_{rs}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Alors, $\mathcal{S}_{rs}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Surjectivité de l'exponentielle matricielle

LEMME 39

- (i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (ii) $\exp$ est différentiable en 0 et $d\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
- (iii) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

[I-P]
p. 396

THÉORÈME 40

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

APPLICATION 41

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

DEV

Annexes

[BMP]
p. 10

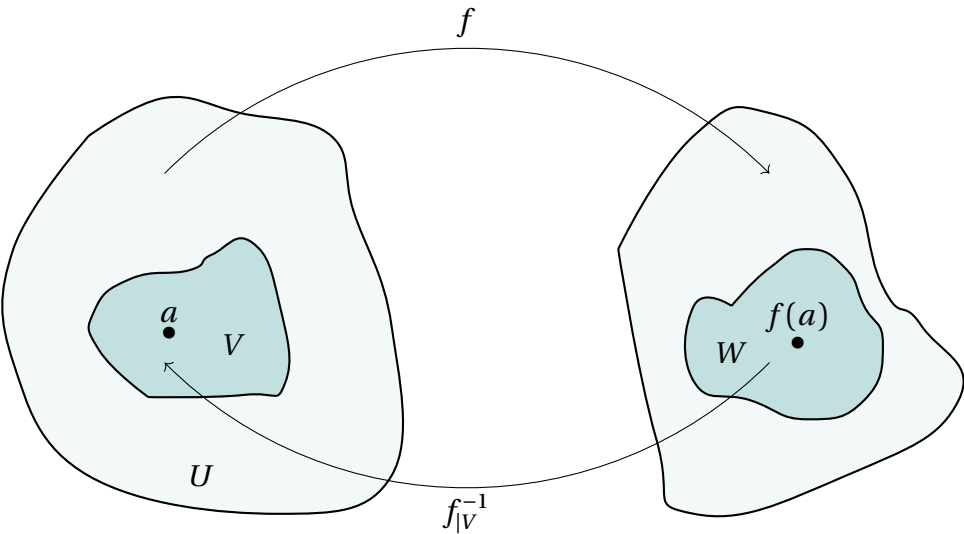


FIGURE 1 : Inversion locale.

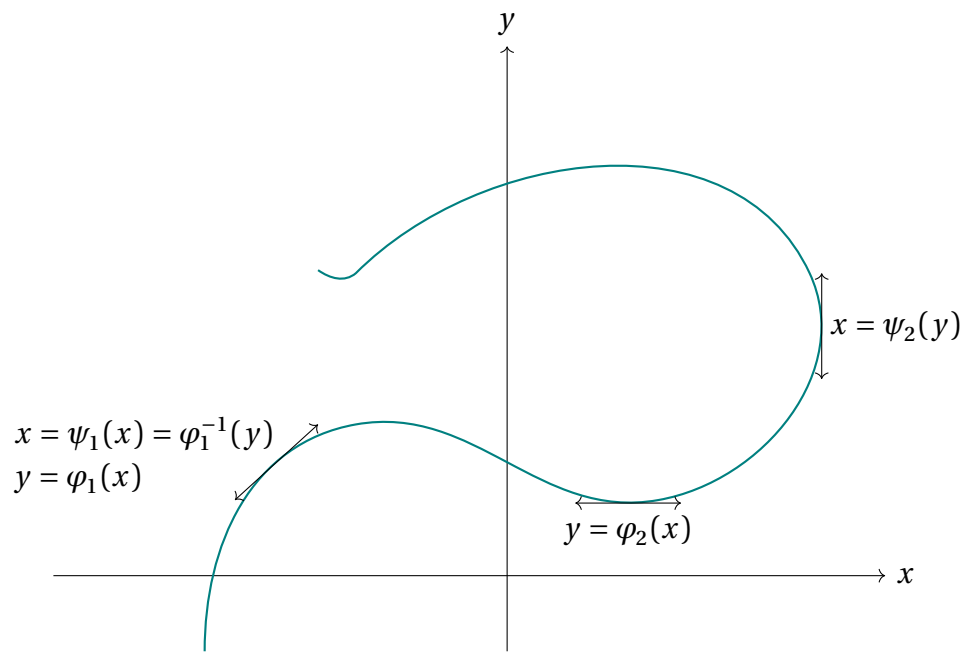


FIGURE 2 : Fonctions implicites.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.