

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

I – Généralités

1. Espaces préhilbertiens

DÉFINITION 1

Soit H un espace vectoriel réel (resp. complexe). On appelle **produit scalaire** sur H une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que :

- (i) $\forall y \in H, x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire.
- (ii) $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
- (iii) $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (resp. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$).

[LI]
p. 27

REMARQUE 2

Dans le cas complexe, on a donc

$$\forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

DÉFINITION 3

En reprenant les notations de la définition, si H est muni d'un produit scalaire, on dit que H est un espace **préhilbertien**.

EXEMPLE 4

- $\mathbb{C}^n$ muni de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : ((x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, (y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

est un espace préhilbertien.

- Plus généralement, on peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ en se donnant un poids $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega_i > 0$. Il suffit de munir l'espace produit du produit scalaire suivant :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : ((x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, (y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}) \mapsto \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \overline{y_i}$$

Dans toute la suite, on considérera un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

NOTATION 5

Puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$, on peut poser

$$\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$$

PROPOSITION 6**Identités de polarisation.**

Soient $x, y \in H$.

(i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

THÉORÈME 7**Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

COROLLAIRE 8

$\|\cdot\|$ définit une norme sur H , ce qui fait de $(H, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

PROPOSITION 9**Identité du parallélogramme.**

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

p. 62

2. Orthogonalité

DÉFINITION 10

On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux si

$$\langle x, y \rangle = 0$$

et on le note $x \perp y$.

p. 31

EXEMPLE 11

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel, on a $(-1, 1) \perp (1, 1)$.

REMARQUE 12**Théorème de Pythagore.**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par la Proposition 6,

$$\forall x, y \in H, x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

DÉFINITION 13

L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, x \perp y\}$$

PROPOSITION 14

Soit $A \subseteq H$.

- (i) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .
- (ii) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
- (iii) $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

[BMP]
p. 99

3. Espaces de Hilbert

DÉFINITION 15

Si $(H, \|\cdot\|)$ est complet, on dit que H est un **espace de Hilbert**.

p. 91

On suppose dans la suite que $(H, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 16

- Tout espace euclidien ou hermitien est un espace de Hilbert.
- L'ensemble des suites de nombres complexes de carré sommables

$$\ell_2(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

est un espace de Hilbert.

II – Le théorème de projection sur un convexe fermé et ses conséquences

1. Théorème de projection

THÉORÈME 17

Projection sur un convexe fermé.

Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C** . Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0 \quad (*)$$

REMARQUE 18

En dimension finie, dans un espace euclidien ou hermitien, on peut projeter sur tous les fermés. On perd cependant l'unicité et la caractérisation angulaire.

PROPOSITION 19

Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. L'application P_C est lipschitzienne de rapport 1 et est, en particulier, continue.

2. Décomposition en somme directe orthogonale

THÉORÈME 20

Projection sur un sous-espace fermé.

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H .

(i) Si $x \in H$, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ qui vérifie

$$p \in F \text{ et } x - p \in F^\perp$$

(ii) $P_F : H \rightarrow F$ est linéaire, continue, surjective.

(iii) $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est le projecteur sur F associé à cette décomposition.

(iv) Soient $x, x_1, x_2 \in H$. On a :

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F, x_2 \in F^\perp \iff x_1 = P_F(x) \text{ et } x_2 = P_{F^\perp}(x)$$

CONTRE-EXEMPLE 21

On considère le sous-espace vectoriel de $\ell_2(\mathbb{N})$ constitué des suites nulles à partir d'un certain rang. Alors $F^\perp = \{0\}$, et ainsi $H \neq F \oplus F^\perp$.

[LI]
p. 32

[BMP]
p. 96

COROLLAIRE 22

Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors,

$$F^{\perp\perp} = \overline{F}$$

COROLLAIRE 23

Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

3. Dualité dans un espace de Hilbert

THÉORÈME 24

de représentation de Riesz.

L'application

$$\Phi: \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H' \\ y & \mapsto & (x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

est une isométrie linéaire bijective de H sur son dual topologique H' .

REMARQUE 25

Cela signifie que :

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $\|\varphi\| = \|y\|$.

APPLICATION 26

Existence de l'adjoint.

Soit $u \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\forall x, y \in H, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

On dit que v est l'**adjoint** de u et on note généralement $v = u^*$.

APPLICATION 27

Dual de L_p .

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On note $\forall p \in]1, 2[, L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. L'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} L_q & \rightarrow & (L_p)' \\ g & \mapsto & \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X f g \, d\mu \right) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

DEV

[Z-Q]
p. 222

III – Bases hilbertiennes

DÉFINITION 28

On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est **orthonormée** de H si :

$$\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

[LJ]
p. 41

EXEMPLE 29

Dans $\ell_2(\mathbb{N})$, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ième position}}, 0 \dots)$$

est orthonormée.

PROPOSITION 30

Toute famille orthonormée est libre.

PROPOSITION 31

Inégalité de Bessel.

Soient $x \in H$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de H . Alors,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

DÉFINITION 32

On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est une **base** de H si elle est orthonormée et totale (ie. $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans H).

THÉORÈME 33

- (i) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.
- (ii) Tout espace de Hilbert séparable (ie. admettant une partie dénombrable dense) admet une base hilbertienne dénombrable.

[BMP]
p. 108

EXEMPLE 34

$\mathbb{K}^n$ est séparable pour tout entier n et L_p aussi pour tout $p \in [1, +\infty[$. On a donc existence d'une base hilbertienne dénombrable pour ces espaces.

THÉORÈME 35

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée dénombrable de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H .
- (ii) $\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.
- (iii) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.
- (iv) L'application

$$\Delta: \begin{array}{ll} H & \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ x & \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

est une isométrie linéaire bijective.

REMARQUE 36

L'égalité du Théorème 35 Point (iii) est appelée **égalité de Parseval**.

COROLLAIRE 37

Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $\ell_2(\mathbb{N})$.

[L]
p. 45

IV – L'espace L_2

1. Aspect hilbertien

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

[BMP]
p. 92

NOTATION 38

On note $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

DÉFINITION 39

On considère la forme bilinéaire suivante sur L_2 :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_X f \overline{g} \, d\mu$$

C'est un produit scalaire hermitien, ce qui confère à $(L_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une structure d'espace préhilbertien.

REMARQUE 40

La norme associée au produit scalaire précédent est la norme $\|\cdot\|_2$ de L_2 .

THÉORÈME 41

Théorème de Riesz-Fischer.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L_p est complet pour la norme $\|\cdot\|_p$.

[L]
p. 10

COROLLAIRE 42

L_2 est un espace de Hilbert.

p. 31

2. Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto x^n$.

[BMP]
p. 110**DÉFINITION 43**

On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive presque partout et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$.

Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids.

NOTATION 44

On note $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 45

Muni de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

$L_2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

THÉORÈME 46

Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n . C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à ρ sur I .

EXEMPLE 47

Polynômes de Hermite.

Si $I = \mathbb{R}$ et si $\forall x \in I, \rho(x) = e^{-x^2}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n} (e^{-x^2})$$

LEMME 48

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_1(I, \rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

p. 140

APPLICATION 49

On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

CONTRE-EXEMPLE 50

On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. Alors, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

3. Séries de Fourier

NOTATION 51

- Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction 2π -périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

[Z-Q]
p. 73**PROPOSITION 52**

$L_2^{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

THÉORÈME 53

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2^{2\pi}$.

[BMP]
p. 123**COROLLAIRE 54**

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

EXEMPLE 55

On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\|f\|_2^2 = \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4 n^4} = \frac{16}{15} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

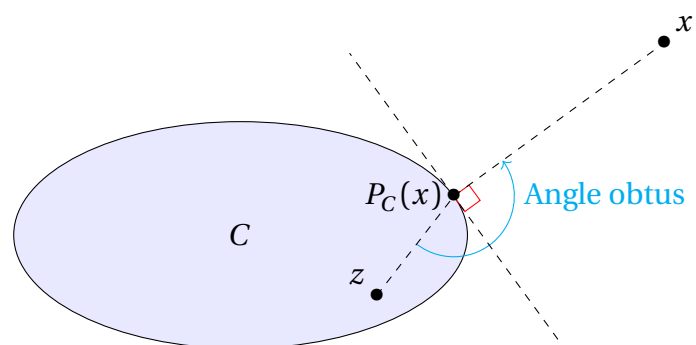
[GOU20]
p. 272**REMARQUE 56**

L'égalité du Corollaire 54 est valable dans $L_2^{2\pi}$, elle signifie donc que

$$\left\| \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n - f \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

[BMP]
p. 124

Annexes



[L]
p. 32

FIGURE 1 : Illustration du théorème de projection sur un convexe fermé.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.
<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.