

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Approximation par des polynômes

1. Approximation locale

THÉORÈME 1

Formule de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur un intervalle $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k}_{=T_n(b)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

[GOU20]
p. 75

APPLICATION 2

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

PROPOSITION 3

En reprenant les notations du Théorème 1, on a

$$\|\exp - T_n\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

sur $[a, b]$.

2. Approximation sur un compact

THÉORÈME 4

Théorèmes de Dini.

(i) Soit (f_n) une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I , alors la convergence est uniforme.

(ii) Soit (f_n) une suite de *fonctions croissantes* réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I , alors la convergence est uniforme.

p. 238

THÉORÈME 5

Théorème de Bernstein.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On note

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

p. 242

COROLLAIRE 6

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

p. 304

On a une version plus générale de ce théorème.

THÉORÈME 7

Théorème de Stone-Weierstrass.

Soit K un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. On suppose de plus que :

- (i) $\mathcal{A}$ sépare les points de K (ie. $\forall x \in K, \exists f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$).
- (ii) $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

[L]
p. 46

REMARQUE 8

Il existe aussi une version “complexe” de ce théorème, où il faut supposer de plus que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison.

EXEMPLE 9

La suite de polynômes réels (r_n) définie par récurrence par

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} : t \mapsto r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t))^2$$

converge vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, 1]$.

3. Interpolation

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$. On se donne $n + 1$ points $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts deux-à-deux.

[DEM]
p. 21

DÉFINITION 10

Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le i -ième **polynôme de Lagrange** associé à $x_0, \dots, x_n$ par

$$\ell_i : x \mapsto \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

THÉORÈME 11

Il existe une unique fonction polynomiale p_n de degré inférieur ou égal à n telle que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_n(x_i) = f(x_i)$:

$$p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$$

THÉORÈME 12

On note $\pi_{n+1} : x \mapsto \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ et on suppose f $n + 1$ fois dérivable $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi_x \in]\min(x, x_0, \dots, x_n), \max(x, x_0, \dots, x_n)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

COROLLAIRE 13

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

APPLICATION 14

Calculs approchés d'intégrales.

On note $I(f) = \int_a^b f(t) dt$. L'objectif est d'approximer $I(f)$ par une expression $P(f)$ et de majorer l'erreur d'approximation $E(f) = |I(f) - P(f)|$.

(i) Méthode des rectangles. On suppose f continue. Avec $P(f) = (b-a)f(a)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|_\infty$.

(ii) Méthode du point milieu. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Avec $P(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$.

(iii) Méthode des trapèzes. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

(iv) Méthode de Simpson. On suppose f de classe $\mathcal{C}^4$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty$.

[DAN]
p. 506

II – Approximation dans les espaces de Lebesgue

1. Convolution

DÉFINITION 15

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de f et g en $x \in \mathbb{R}^d$ **existe** si la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

PROPOSITION 16

Dans $L_1(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution est commutatif, bilinéaire et associatif.

[AMR08]
p. 75

THÉORÈME 17

Soient $p, q > 0$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$.

(i) Si $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et est uniformément continue. On a, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ et, si $p \neq 1, +\infty$, $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

(iii) Si $p = 1$ et $q \in [1, +\infty[$, alors $(f * g)(x)$ existe pp. en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$.

(iv) Si $p = 1$ et $q = 1$, alors $(f * g)(x)$ existe pp. en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

EXEMPLE 18

Soient $a < b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b - a \\ b + a - |x| & \text{si } b - a \leq |x| \leq b + a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PROPOSITION 19

$L_1(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution.

p. 85

REMARQUE 20

Cette algèbre n'a pas d'élément neutre. Afin de pallier à ce manque, nous allons voir la notion d'approximation de l'identité dans la sous-section suivante.

2. Densité

DÉFINITION 21

On appelle **approximation de l'identité** toute suite (ρ_n) de fonctions mesurables de $L_1(\mathbb{R}^d)$ telles que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda_d = 1$.

(ii) $\sup_{n \geq 1} \|\rho_n\|_1 < +\infty$.

(iii) $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \epsilon)} |\rho_n(x)| dx = 0$.

[B-P]
p. 306**REMARQUE 22**

Dans la définition précédente, (i) implique (ii) lorsque les fonctions ρ_n sont positives, puisque $\|\rho_n\|_1 = 1$. Plutôt que des suites, on pourra considérer les familles indexées par $\mathbb{R}_*^+$.

EXEMPLE 23

- Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$$

- Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$$

- Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

THÉORÈME 24

Soit (ρ_n) une approximation de l'identité. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\forall n \geq 1, f * \rho_n \in L_p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \rho_n - f\|_p \rightarrow 0$$

p. 307

THÉORÈME 25

Soient (ρ_n) une approximation de l'identité et $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors :

- Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors $(f * \rho_n)(x_0) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$.
- Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\|f * \rho_n - f\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si f est continue sur un compact K , alors $\sup_{x \in K} |(f * \rho_n)(x) - f(x)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

DÉFINITION 26

On qualifie de **régularisante** toute suite (α_n) d'approximations de l'identité telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

EXEMPLE 27

Soit $\alpha \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ une densité de probabilité. Alors la suite (α_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx)$ est régularisante.

APPLICATION 28

- (i) $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
- (ii) $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L_p(\mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

[AMR08]
p. 96

III – Approximations de fonctions périodiques

1. Séries de Fourier

NOTATION 29

- Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction 2π -périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

[Z-Q]
p. 73

PROPOSITION 30

$L_2^{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

DÉFINITION 31

Soit $f \in L_1^{2\pi}$. On appelle :

- **Coefficients de Fourier complexes**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f, e_n \rangle$$

- **Coefficients de Fourier réels**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

[GOU20]
p. 268

2. Approximation hilbertienne

THÉORÈME 32

Soit H un espace de Hilbert et $(\epsilon_n)_{n \in I}$ une famille orthonormée dénombrable de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille orthonormée $(\epsilon_n)_{n \in I}$ est une base hilbertienne de H .
- (ii) $\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, \epsilon_n \rangle \epsilon_n$.
- (iii) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, \epsilon_n \rangle|^2$.

[BMP]
p. 109

REMARQUE 33

L'égalité du Théorème 32 Point (iii) est appelée **égalité de Parseval**.

THÉORÈME 34

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2^{2\pi}$.

p. 123

COROLLAIRE 35

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

EXEMPLE 36

On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\|f\|_2^2 = \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4 n^4} = \frac{16}{15} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

[GOU20]
p. 272**REMARQUE 37**

L'égalité du Point (iii) est valable dans $L_2^{2\pi}$, elle signifie donc que

$$\left\| \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n - f \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

[BMP]
p. 124

3. Approximation au sens de Cesàro

DÉFINITION 38

Soit $f \in L_1^{2\pi}$. On appelle **série de Fourier** associée à f la série $(S_N(f))$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \stackrel{(*)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

[GOU20]
p. 269**REMARQUE 39**

L'égalité (*) de la définition précédente est justifiée car,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} = a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

DÉFINITION 40

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$ est appelée **noyau de Dirichlet** d'ordre N .

[AMR08]
p. 184

PROPOSITION 41

Soit $N \in \mathbb{N}$.

(i) D_N est une fonction paire, 2π -périodique, et vérifie $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi D_N(x) dx = 1$.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(iii) Pour tout $f \in L_1^{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

DÉFINITION 42

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé **noyau de Fejér** d'ordre N .

NOTATION 43

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ la somme de Cesàro d'ordre N de la série de Fourier d'une fonction $f \in L_1^{2\pi}$.

PROPOSITION 44

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L_1^{2\pi}$.

(i) K_N est une fonction positive et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

(iii) $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.

(iv) $\sigma_N(f) = f * K_N$.

THÉORÈME 45

Théorème de Fejér.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique.

(i) Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f .

(ii) Si $f \in L_p^{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour $\|\cdot\|_p$.

COROLLAIRE 46

L'espace des polynômes trigonométriques $\{\sum_{n=-N}^N c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$ est dense dans l'espace des fonctions continues 2π -périodiques pour $\|\cdot\|_{\infty}$ et est dense dans $L_p^{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Analyse

[B-P]

Marc BRIANE et Gilles PAGES. *Analyse. Théorie de l'intégration*. 8^e éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Analyse numérique et équations différentielles

[DEM]

Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. 4^e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.

<https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.