

204 Connexité. Exemples d'applications.

I – Diverses approches de la connexité

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Une approche topologique

PROPOSITION 1

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.
- (ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.
- (iii) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E .

[GOU20]
p. 38

DÉFINITION 2

Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de Proposition 1 est dit **connexe**.

REMARQUE 3

Remarquons qu'il s'agit-là d'une définition *topologique* : tous les résultats de cette sous-section sont donc valables dans le cadre plus général d'un espace topologique.

PROPOSITION 4

Soit $A \subseteq E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) A est connexe.
- (ii) Si $A \subseteq O_1 \cup O_2$ avec O_1, O_2 ouverts de E tels que $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors

$$(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subseteq O_2) \text{ ou } (A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subseteq O_1)$$

- (iii) Si $A \subseteq F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de E tels que $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors

$$(A \cap F_1 = \emptyset \text{ et } A \subseteq F_2) \text{ ou } (A \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subseteq F_1)$$

EXEMPLE 5

$\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 6

Une partie ouverte et fermée d'un espace connexe est vide ou égale à l'espace entier.

p. 350

PROPOSITION 7

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

p. 39

APPLICATION 8

Soit $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors il existe deux points diamétralement opposés de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par f .

p. 44

COROLLAIRE 9

E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

p. 39

PROPOSITION 10

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E . On suppose que

$$\exists i_0 \in I \text{ tel que } \forall i \in I, C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$$

Alors, $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

CONTRE-EXEMPLE 11

$\{0\}$ et $\{1\}$ sont des connexes de $\mathbb{R}$, mais pas $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.

PROPOSITION 12

Un produit fini d'espaces métriques est connexe si et seulement si ces espaces métriques sont tous connexes.

DEV**APPLICATION 13**

Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit (u_n) une suite de E telle que $d(u_n, u_{n-1}) \rightarrow 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

[I-P]
p. 116**COROLLAIRE 14**

Lemme de la grenouille.

Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et (x_n) une suite de $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors (x_n) converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

2. Une approche géométrique

DÉFINITION 15

On appelle **chemin** de E toute application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ continue. L'image $\gamma^* = \gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle un **arc**, $\gamma(0)$ l'**origine** de l'arc et $\gamma(1)$ son **extrémité**.

DÉFINITION 16

E est dit **connexe par arcs** si pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b .

REMARQUE 17

Il s'agit là encore d'une définition topologique.

THÉORÈME 18

Un espace connexe par arcs est connexe.

CONTRE-EXEMPLE 19

L'ensemble

$$\Gamma = \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}^+) \right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_*^-) \right)$$

est un connexe de $\mathbb{R}^2$ non connexe par arcs.

PROPOSITION 20

La réciproque est vraie dans un ouvert d'un espace vectoriel normé.

APPLICATION 21

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

3. Une approche algébrique

DÉFINITION 22

On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante sur E :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists C \subseteq E \text{ connexe tel que } x, y \in C$$

PROPOSITION 23

- (i) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E .
- (ii) Si $x \in E$, sa classe d'équivalence est la réunion des connexes contenant x .

DÉFINITION 24

Une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ est une **composante connexe** de E .

REMARQUE 25

E est la réunion disjointe de ses composantes connexes. E est donc connexe s'il n'admet qu'une seule composante connexe.

EXEMPLE 26

On se place dans le cadre où E est un espace vectoriel euclidien. Alors, $\mathcal{O}(E)$ est non-connexe. Ses composantes connexes sont $\text{SO}(E)$ et $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$.

[ROM21]
p. 724

PROPOSITION 27

Les composantes connexes de E sont des fermés de E . Si elles sont en nombre fini, ce sont également des ouverts de E .

[GOU20]
p. 41

II – Exemples d'applications en analyse

1. En analyse réelle

THÉORÈME 28

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

p. 41

THÉORÈME 29

Des valeurs intermédiaires.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

REMARQUE 30

Une autre manière d'écrire ce résultat est que si $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) avec $a < b$, alors pour tout $\gamma \in [f(a), f(b)]$ (resp. pour tout $\gamma \in [f(b), f(a)]$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

COROLLAIRE 31**Théorème de Darboux.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors $f'(I)$ est un intervalle.

p. 47

2. En calcul différentiel**PROPOSITION 32**

Soit U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E . Soit $f : U \rightarrow F$ où F est un espace vectoriel normé. Si f est différentiable et telle que $\forall x \in U, df_x = 0$, alors f est constante sur U .

p. 328

EXEMPLE 33

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ telle que la suite $(f^{(n)})$ converge uniformément sur tout compact de Ω . On note g la limite de la suite $(f^{(n)})$. Alors, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $g = C \exp$.

[BMP]
p. 80**PROPOSITION 34**

Soit U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E . Soit $f : U \rightarrow E$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\forall x \in U, df_x$ est une isométrie, alors f est une isométrie affine.

[GOU20]
p. 349**3. En analyse complexe**

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. On suppose Ω connexe. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

THÉORÈME 35**Zéros isolés.**

Si f est une fonction analytique sur Ω et si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω .

[BMP]
p. 53**COROLLAIRE 36**

L'ensemble des zéros d'une fonction analytique non nulle sur Ω est au plus dénombrable.

REMARQUE 37**Prolongement analytique.**

Reformulé de manière équivalente au Théorème 35, si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω , alors elles sont égales sur Ω .

EXEMPLE 38

Il existe une unique fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

et c'est la fonction identité.

p. 77

CONTRE-EXEMPLE 39

Il existe au moins deux fonctions g holomorphes sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

APPLICATION 40**Transformée de Fourier d'une Gaussienne.**

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-itx} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

p. 83

THÉORÈME 41**Principe du maximum.**

On suppose Ω borné et f holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On note M le maximum de $|f|$ sur la frontière de Ω . Alors,

- (i) Pour tout $z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$.
- (ii) S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = M$, alors f est constante sur Ω .

p. 72

APPLICATION 42

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω et continues sur $\overline{\Omega}$. Si (f_n) converge uniformément sur la frontière de Ω , alors (f_n) converge uniformément sur Ω et la limite est holomorphe.

p. 80

APPLICATION 43

On suppose que $\overline{D}(0, 1) \subseteq \Omega$ et f holomorphe sur Ω . On suppose de plus que $f(0) = 1$ et $|f(z)| \geq 2$ sur le cercle unité. Alors f s'annule sur le cercle unité.

III – Exemple d'application en algèbre

PROPOSITION 44

$\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})^-$.

[BMP]
p. 213**APPLICATION 45**

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

PROPOSITION 46

$\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

[ROM21]
p. 770

LEMME 47

- (i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (ii) $\exp$ est différentiable en 0 et $d\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
- (iii) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

[I-P]
p. 396**DEV****THÉORÈME 48**

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

APPLICATION 49

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.