

203 Utilisation de la notion de compacité.

I – Diverses caractérisations de la compacité

1. Caractérisation topologique

DÉFINITION 1

Un espace métrique (E, d) est **compact** s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :

De tout recouvrement de E par des ouverts de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

[GOU20]
p. 27

EXEMPLE 2

Tout espace métrique fini est compact.

PROPOSITION 3

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si, de toute famille de fermés de E d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

PROPOSITION 4

- (i) Une réunion finie de parties compactes est compacte.
- (ii) Une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

2. Caractérisation séquentielle

Soit (E, d) un espace métrique.

THÉORÈME 5

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

(E, d) est compact si et seulement si toute suite de E admet une sous-suite convergente dans E .

[DAN]
p. 51

EXEMPLE 6

Tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact, mais $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

PROPOSITION 7

- (i) Un espace métrique compact est complet.
- (ii) Un espace métrique compact est borné.

PROPOSITION 8

Soit $A \subseteq E$.

- (i) Si A est compacte, alors A est une partie fermée bornée de E .
- (ii) Si E est compact et A est fermée, alors A est compacte.

PROPOSITION 9

Un produit d'espaces métriques compacts est compact pour la distance produit.

APPLICATION 10

Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit (u_n) une suite de E telle que $d(u_n, u_{n-1}) \rightarrow 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

[I-P]
p. 116**COROLLAIRE 11**

Lemme de la grenouille.

Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et (x_n) une suite de $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors (x_n) converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

3. Caractérisation dans un espace vectoriel normé de dimension finie

DEV

THÉORÈME 12

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

[L]
p. 15**COROLLAIRE 13**

Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.

COROLLAIRE 14

- (i) Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.
- (ii) Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé dans cet espace.
- (iii) Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toute application linéaire $T : E \rightarrow F$ (où F désigne un espace vectoriel normé arbitraire) est continue.

APPLICATION 15

L'exponentielle d'une matrice est un polynôme en la matrice.

[C-G]
p. 407

THÉORÈME 16**Théorème de Riesz.**

La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement s'il est de dimension finie.

[LI]
p. 17

II – Utilisation en analyse

1. Continuité et compacité

PROPOSITION 17

Soient (E, d_E) , (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue. Si E est compact, alors $f(E)$ est compact.

[DAN]
p. 55**COROLLAIRE 18**

Toute application définie et continue sur un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est bornée.

PROPOSITION 19

Sous les hypothèses et notations de la Proposition 17, en supposant de plus f injective, alors f réalise un homéomorphisme entre E et $f(E)$.

THÉORÈME 20**des bornes.**

Toute fonction réelle continue sur un espace métrique compact est bornée et atteint ses bornes.

COROLLAIRE 21**Théorème des valeurs intermédiaires.**

L'image d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle continue est un segment $[c, d]$ de $\mathbb{R}$.

APPLICATION 22**Théorème de Rolle.**

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

[GOU20]
p. 73

APPLICATION 23**Point fixe dans un compact.**

Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

alors f admet un unique point fixe et pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers ce point fixe.

[ROU]
p. 171

EXEMPLE 24

$\sin$ admet un unique point fixe sur $[0, 1]$.

APPLICATION 25**Théorème de d'Alembert-Gauss.**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

[DAN]
p. 58

THÉORÈME 26**Théorème de Heine.**

Une application continue à valeurs dans un espace métrique définie sur un espace métrique compact est uniformément continue.

THÉORÈME 27**Théorèmes de Dini.**

(i) Soit (f_n) une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I , alors la convergence est uniforme.

(ii) Soit (f_n) une suite de *fonctions croissantes* réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I , alors la convergence est uniforme.

[GOU20]
p. 238

2. Approximation de fonctions

THÉORÈME 28

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

p. 304

On a une version plus générale de ce théorème.

THÉORÈME 29

Théorème de Stone-Weierstrass.

Soit K un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. On suppose de plus que :

- (i) $\mathcal{A}$ sépare les points de K (ie. $\forall x \in K, \exists f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$).
- (ii) $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

[LI]
p. 46

REMARQUE 30

Il existe aussi une version “complexe” de ce théorème, où il faut supposer de plus que $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison.

EXEMPLE 31

La suite de polynômes réels (r_n) définie par récurrence par

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} : t \mapsto r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t))^2$$

converge vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, 1]$.

3. Étude d'équations différentielles

THÉORÈME 32

Théorème d'Arzelà-Peano.

Soit F une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation différentielle

$$y' = F(t, y)$$

Pour tout couple (y_0, t_0) de U , le problème de Cauchy admet une solution y définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 .

[GOU20]
p. 375

EXEMPLE 33

L'équation différentielle

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

admet des solutions.

THÉORÈME 34

Lemme de sortie de tout compact.

Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F :]a, b[\times O \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = F(t, y)$.

Alors, si $\beta < b$ (resp. si $a < \alpha$), pour tout compact $K \subseteq O$, il existe un voisinage V de β (resp. de α) dans $]a, \beta[$ tel que $\varphi(t) \notin K$ pour tout $t \in V$.

p. 400

4. Recherche d'extrema

PROPOSITION 35

Le maximum de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \det(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

est atteint sur le cercle unité de $\mathbb{R}^n$.

[ROU]
p. 409

COROLLAIRE 36

Inégalité de Hadamard.

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On a égalité si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille orthogonale.

REMARQUE 37

Géométriquement, cette inégalité exprime que les parallélépipèdes de volume maximum sont rectangles.

5. Convexité et compacité

THÉORÈME 38

Hahn-Banach géométrique.

Soit E un espace vectoriel normé. Soient C et K deux parties non vides de E disjointes et telles que C soit convexe et fermée, et K soit convexe et compacte. Alors, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ telle que :

$$\sup_{x \in C} \operatorname{Re}(\varphi(x)) < \inf_{x \in K} \operatorname{Re}(\varphi(x))$$

[LI]
p. 159

COROLLAIRE 39

Théorème de Minkowski.

Toute partie convexe et fermée d'un espace vectoriel normé réel est égale à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

COROLLAIRE 40

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et soit D une partie de H . Alors l'enveloppe convexe fermée de D est égale à l'intersection des demi-espaces de la forme

$$\{y \in H \mid f(y) \leq \alpha\}$$

qui contiennent D , où $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

[BMP]
p. 133

III – Utilisation en algèbre

PROPOSITION 41

- (i) $\operatorname{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact (et connexe).
- (ii) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (non-connexe).

[C-G]
p. 62

APPLICATION 42

Décomposition polaire.

L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

p. 376

COROLLAIRE 43

Tout sous-groupe compact de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

COROLLAIRE 44

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe.

p. 401

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.
<https://objectifagregation.github.io>.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome I*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.