

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de dimension finie n .

I – Dual d'un espace vectoriel

1. Formes linéaires, espace dual

DÉFINITION 1

Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ formé par l'ensemble des formes linéaires sur E est appelé **dual** de E et est noté E^* .

[ROM21]
p. 441

EXEMPLE 2

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la projection

$$p_j : \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_j$$

est une forme linéaire.

- Toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire.

REMARQUE 3

Une forme linéaire non nulle sur E est surjective.

DÉFINITION 4

On appelle **hyperplan** de E , le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

PROPOSITION 5

- (i) Un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire d'une droite.
- (ii) Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont liées.

2. Bases duales

DÉFINITION 6

En reprenant les notations de la Exemple 2, les projections p_i sont les **formes linéaires coordonnées**. On note $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = e_i^*$. La famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est appelée **base duale** de $\mathcal{B}$.

[GOU21]
p. 133

REMARQUE 7

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

THÉORÈME 8

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors, la base duale $\mathcal{B}^*$ est une base de E^* .

COROLLAIRE 9

- (i) E^* est un espace vectoriel de dimension n .
- (ii) Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

COROLLAIRE 10

Tout hyperplan de E est de dimension $n - 1$.

[ROM21]
p. 446

EXEMPLE 11

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Alors,

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où $(e_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est la base duale de la base canonique $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\mathbb{R}^n$.

[GOU20]
p. 325

3. Bidual

DÉFINITION 12

On appelle **bidual** de E le dual E^* . On le note E^{**} .

EXEMPLE 13

Pour $x \in E$, l'application $\text{ev}_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$ est un élément de E^{**} .

THÉORÈME 14

$x \mapsto \text{ev}_x$ est un isomorphisme entre les espaces E et E^{**} .

REMARQUE 15

Cet isomorphisme est canonique : il ne dépend pas du choix d'une base de E .

COROLLAIRE 16

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^* . Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i^* = f_i$.

DÉFINITION 17

En reprenant les notations précédentes, $(e_1, \dots, e_n)$ est appelée **base antéduale** de $(f_1, \dots, f_n)$.

EXEMPLE 18

On suppose $n = 3$. Soient (e_1, e_2, e_3) une base de E et

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$$

Alors, (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* , dont une base antéduale est (f_1, f_2, f_3) où

$$f_1 = \frac{1}{13}(6e_1 - 2e_2 + 3e_3), f_2 = \frac{1}{13}(-3e_1 - e_2 + 5e_3), f_3 = \frac{1}{13}(-2e_1 + 5e_2 - e_3)$$

II – Orthogonalité au sens de la dualité

1. Orthogonal d'une partie, d'une famille

DÉFINITION 19

On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.

[ROM21]
p. 446

DÉFINITION 20

- L'orthogonal dans E^* d'une partie non vide X de E est l'ensemble

$$X^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$$

- L'orthogonal dans E d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble

$$Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$$

THÉORÈME 21

Soient A, B des parties non vides de E et U, V des parties non vides de E^* .

- (i) Si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
- (ii) Si $U \subseteq V$, alors $V^\circ \subseteq U^\circ$.
- (iii) $A \subseteq (A^\perp)^\circ$.
- (iv) $U \subseteq (U^\circ)^\perp$.
- (v) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
- (vi) $U^\circ = \text{Vect}(U)^\circ$.
- (vii) $\{0\}^\perp = E^*, E^\perp = \{0\}, \{0\}^\circ = E$ et $(E^*)^\circ = \{0\}$.

COROLLAIRE 22

(i) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$$

(ii) Pour tout sous-espace vectoriel G de E^* , on a

$$\dim(G) + \dim(F^\circ) = n$$

(iii) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , et pour tout sous-espace vectoriel G de E^* , on a $F = (F^\perp)^\circ$ et $G = (G^\circ)^\perp$.

(iv) Pour toute partie X de E , on a $(X^\perp)^\circ = \text{Vect}(X)$.

(v) Pour tout sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E , on a :

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \text{ et } (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$$

(vi) Pour tout sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 de E^* , on a :

$$(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ \text{ et } (G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ$$

COROLLAIRE 23

Si $(\varphi_i)_{i \in [1, p]}$ est une famille de formes linéaires sur E de rang r , le sous-espace vectoriel $F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$ de E est alors de dimension $n - r$. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension m , il existe alors une famille de formes linéaires $(\varphi_i)_{i \in [1, p]}$ de rang $r = n - m$ telle que $F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$.

2. Application transposée

DÉFINITION 24

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La **transposée** de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'application

$${}^t u : \begin{array}{ccc} F^* & \rightarrow & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ u \end{array}$$

PROPOSITION 25

$u \mapsto {}^t u$ est linéaire, injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

THÉORÈME 26

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

- (i) ${}^t v \circ u = {}^t u \circ {}^t v$.
- (ii) Pour $F = E$, ${}^t \text{id}_E = \text{id}_{E^*}$.
- (iii) Si u est un isomorphisme de E sur F , alors ${}^t u$ est un isomorphisme de F^* sur E^* et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.
- (iv) $\text{Ker}({}^t u) = (\text{Im}(u))^{\perp}$.
- (v) u est surjective si et seulement si ${}^t u$ est injective.
- (vi) $\text{Im}({}^t u) = (\text{Ker}(u))^{\perp}$.
- (vii) u est injective si et seulement si ${}^t u$ est surjective.
- (viii) Si E et F sont de dimension finie, alors u et ${}^t u$ ont même rang.
- (ix) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors ${}^t A$ est la matrice de ${}^t u$ dans les bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$.

COROLLAIRE 27

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors, la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est

$${}^t P^{-1}$$

[GOU21]
p. 136

PROPOSITION 28

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors un sous-espace vectoriel de E est stable par u si et seulement si son orthogonal est stable par ${}^t u$.

APPLICATION 29

Trigonalisation simultanée.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables qui commutent deux-à-deux. Alors, il existe une base commune de trigonalisation.

DEV

p. 176

3. Lien avec l'orthogonalité au sens euclidien

THÉORÈME 30

de représentation de Riesz.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

$$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \text{ tel que } \forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

[ROM21]
p. 718

Ainsi, si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on retrouve la notion classique d'orthogonalité euclidienne avec $\varphi : x \mapsto \langle x, a \rangle$.

p. 446

EXEMPLE 31

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A &\mapsto (X \mapsto \text{trace}(AX)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

[GOU21]
p. 138

III – Applications

1. Formule de Taylor

On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

[ROM21]
p. 442

APPLICATION 32

Formule de Taylor.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit :

$$e_j : \begin{aligned} \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K} \\ P &\mapsto \frac{P^{(j)}(0)}{j!} \end{aligned}$$

Alors, $(e_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$, dont la base antéduale est $(X^i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

COROLLAIRE 33

On suppose $P \neq 0$. Alors $a \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre h de P si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1, h-1 \rrbracket, P^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(h)}(a) \neq 0$$

[GOU21]
p. 64

EXEMPLE 34

Le polynôme $P_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} X^i$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

REMARQUE 35

C'est encore vrai en caractéristique non nulle pour $h = 1$.

2. Invariants de similitude

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

DÉFINITION 36

On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = E$.

PROPOSITION 37

u est cyclique si et seulement si $\deg(\pi_u) = n$.

DÉFINITION 38

Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 39

u est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathcal{C}(\pi_u)$.

THÉORÈME 40

Il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E tous stables par u tels que :

- $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.
- $u_i = u|_{F_i}$ est cyclique pour tout i .
- Si $P_i = \pi_{u_i}$, on a $P_{i+1} \mid P_i$ pour tout i .

La famille de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition. On l'appelle **suite des invariants de similitude** de u .

THÉORÈME 41

Réduction de Frobenius.

Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de u , alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs $P_1 = \pi_u$ et $P_1 \dots P_r = \chi_u$.

COROLLAIRE 42

Deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont la même suite d'invariants de similitude.

APPLICATION 43

Pour $n = 2$ ou 3 , deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

APPLICATION 44

Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. Alors, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Classification des formes quadratiques

Soit q une forme quadratique sur E .

p. 243

LEMME 45

Il existe une base q -orthogonale (ie. si φ est la forme polaire de q , une base B où $\forall e, e' \in B$, $\varphi(e, e') = 0$ si $e \neq e'$).

THÉORÈME 46

Loi d'inertie de Sylvester.

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } q = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$$

où les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et où $p + q \leq n$. De plus, ces entiers ne dépendent que de q et pas de la décomposition choisie.

Le couple (p, q) est la **signature** de q et le rang q est égal à $p + q$.

EXEMPLE 47

La signature de la forme quadratique $q : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + xz + yz$ est $(2, 1)$, donc son rang est 3.

DEV

Bibliographie

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.