

149 Déterminant. Exemples et applications.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

I – Construction

1. Formes n -linéaires alternées et déterminant

DÉFINITION 1

Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E_1, \dots, E_p \rightarrow F$.

- f est dite **p -linéaire** si en tout point les p applications partielles sont linéaires.
- Si f est p -linéaire et si $E_1 = \dots = E_p$ ainsi que $F = \mathbb{K}$, f est une **forme p -linéaire**. On note $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p -linéaires sur E .
- Si de plus $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux, alors f est dite **alternée**.

[GOU21]
p. 140

EXEMPLE 2

En reprenant les notations précédentes, pour $p = 2$, f est bilinéaire.

PROPOSITION 3

$\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et, $\dim(\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})) = \dim(E)^p$.

THÉORÈME 4

L'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1. De plus, il existe une unique forme n -linéaire alternée f prenant la valeur 1 sur une base $\mathcal{B}$ de E . On note $f = \det_{\mathcal{B}}$.

DÉFINITION 5

$\det_{\mathcal{B}}$ est l'application **déterminant** dans la base $\mathcal{B}$. En l'absence d'ambiguïté, on s'autorise à noter $\det = \det_{\mathcal{B}}$.

PROPOSITION 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si $x_1, \dots, x_n \in E$ ($\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut écrire $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$), on a la formule $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)}$.

PROPOSITION 7

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E , alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

THÉORÈME 8

Une famille de vecteurs est liée si et seulement si son déterminant est nul dans une base quelconque de E .

2. Déterminant d'un endomorphisme

LEMME 9

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée.

DÉFINITION 10

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **déterminant** de f le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. On le note $\det(f)$.

PROPOSITION 11

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

(ii) $\det(\text{id}_E) = 1$.

(iii) $f \in \text{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

3. Déterminant d'une matrice carrée

DÉFINITION 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A , le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$.

NOTATION 13

Si $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note son déterminant sous la forme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 14

• $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

• $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39$.

PROPOSITION 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) $\det(A) = \det({}^t A)$.
- (ii) $\det(A)$ dépend linéairement des colonnes (resp. des lignes) de A .
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- (iv) $\det(A) \neq 0 \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- (v) Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base, alors $\det(f) = \det(A)$.
- (vi) Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- (vii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

[GOU21]
p. 142

II – Méthodes de calcul

1. Propriétés

PROPOSITION 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes ou les lignes de A , le déterminant est multiplié par $\epsilon(\sigma)$ (la signature de σ).
- (ii) Si A est triangulaire, $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux de A .
- (iii) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose sur les lignes.

EXEMPLE 17

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -2(m+1)$$

PROPOSITION 18**Déterminant par blocs.**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

alors $\det(M) = \det(A) \det(B)$.

2. Mineurs et cofacteurs

DÉFINITION 19

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle **mineur** de l'élément $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .
- Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ s'appelle le **cofacteur** de $a_{i,j}$.
- On appelle **mineurs principaux** de A les déterminants $\Delta_k = \det((a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

PROPOSITION 20

En reprenant les notations précédentes :

- (i) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$ (développement par rapport à la j -ième colonne).
 (ii) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$ (développement par rapport à la i -ième ligne).

EXEMPLE 21

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6(6 - 14) = -48$$

[GRI]
p. 118

DÉFINITION 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice $(A_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée **comatrice** de A , et on la note $\text{com}(A)$.

[GOU21]
p. 143

PROPOSITION 23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A) A = \det(A) I_n$$

COROLLAIRE 24

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$$

EXEMPLE 25

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Exemples classiques

EXEMPLE 26

Déterminant de Vandermonde.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

EXEMPLE 27

Déterminant de Cauchy.

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i + b_j \neq 0$. Alors

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$$

p. 150

EXEMPLE 28

Déterminant circulant.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

p. 153

III – Applications

1. En géométrie

a. Volume d'un parallélépipède

THÉORÈME 29

L'aire $\mathcal{A}(v, w)$ du parallélogramme engendré par deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ est égale à

$$\mathcal{A}(v, w) = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

En particulier, si $n = 2$, $\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$.

[GRI]
p. 130

COROLLAIRE 30

Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$ (ie. l'ensemble $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in [0, 1]\}$). On a alors :

$$\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

b. Suite de polygones**THÉORÈME 31****Suite de polygones.**

Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0 .

[I-P]
p. 389**2. En algèbre linéaire****a. Aux systèmes d'équations linéaires**

On cherche à résoudre un système d'équations linéaires de la forme

$$AX = B \tag{S}$$

avec $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, q \rrbracket}}$ et $B = (b_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{K}^p$.

p. 143

THÉORÈME 32**Formules de Cramer.**

On se place dans le cas $p = q = n$. Alors, (S) admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, elle est donnée par $X = (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

avec A_i obtenue en remplaçant la i -ième colonne de A par B .

LEMME 33

Soit $r = \text{rang}(A)$. Il existe un déterminant Δ d'ordre r extrait de A .

DÉFINITION 34

- Le déterminant Δ précédent est le **déterminant principal** de A .
- Les équations (resp. inconnues) dont les indices sont deux des lignes (resp. colonnes) de Δ s'appellent les **équations principales** (resp. **inconnues principales**).
- Si $\Delta = \det(a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, on appelle **déterminants caractéristiques** les déterminants d'ordre $r+1$ de la forme

$$\left| \begin{array}{c|c} (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} & (b_i)_{i \in I} \\ \hline (a_{k,j})_{j \in J} & b_k \end{array} \right| \text{ avec } k \notin J.$$

THÉORÈME 35**Théorème de Rouché-Fontené.**

Le système (S) admet des solutions si et seulement si $p = r$ ou les $p - r$ déterminants caractéristiques sont nuls. Le système est alors équivalent au système des équations principales. Les inconnues principales étant déterminées par un système de Cramer à l'aide des inconnues non principales.

EXEMPLE 36

Si,

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x - z - t = 1 \\ -x + y + z + 2t = m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

on a $\text{rang}(A) = 2$, (S) admet des solutions si et seulement si $m = -1$, et

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y = 1 + z - t \\ x = 1 + z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + z + t \\ y = -t \end{cases}$$

b. À la réduction des endomorphismes

DÉFINITION 37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :

- **Polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A = \det(A - XI_n)$.
- **Polynôme minimal** de A l'unique polynôme unitaire π_A qui engendre l'idéal $\text{Ann}(A) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(A) = 0\}$.

[GOU21]
p. 171

p. 186

PROPOSITION 38

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \pi_A(\lambda) = 0$$

p. 172

PROPOSITION 39

- A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
- A est diagonalisable si et seulement si π_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

p. 185

COROLLAIRE 40

Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, A est diagonalisable si et seulement si $A^q = A$.

THÉORÈME 41

Théorème de Cayley-Hamilton.

$$\pi_u \mid \chi_u$$

c. À l'étude du groupe linéaire

THÉORÈME 42

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in \text{GL}(E)$.
- (ii) $\text{Ker}(u) = \{0\}$.
- (iii) $\text{Im}(u) = E$.
- (iv) $\text{rang}(u) = n$.
- (v) $\det(u) \neq 0$.
- (vi) u transforme toute base de E en une base de E .
- (vii) Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \text{id}_E$.
- (viii) Il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = \text{id}_E$.

[ROM21]
p. 140

PROPOSITION 43

$\det : \text{GL}(E) \rightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme surjectif.

[PER]
p. 95

Soit p un nombre premier ≥ 3 . On se place sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$.

DÉFINITION 44

Soit H un hyperplan de E et G un supplémentaire de H . On définit f la **dilatation** de base H , de direction G et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$ par

$$\forall x \in H, \forall y \in G, f(x + y) = x + \lambda y$$

THÉORÈME 45

Si $|\mathbb{K}| \geq 3$, les dilatations engendrent $GL(E)$.

NOTATION 46

Soit $a \in \mathbb{F}_p$. On note $\left(\frac{a}{p}\right)$ le symbole de Legendre de a modulo p .

LEMME 47

$a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ est un morphisme de groupes.

LEMME 48

Il y a $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques dans $\mathbb{F}_p^*$.

THÉORÈME 49

Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

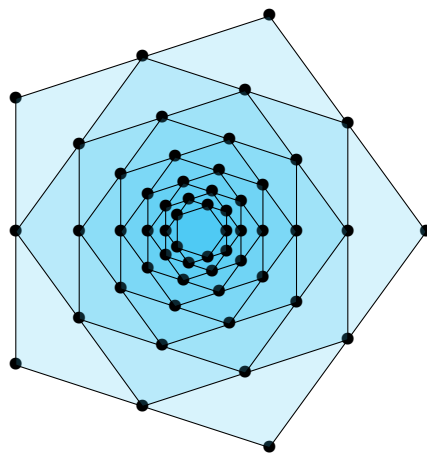
THÉORÈME 50

Théorème de Frobenius-Zolotarev.

$$\forall u \in GL(E), \epsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$$

où u est vu comme une permutation des éléments de E .

Annexes



[I-P]
p. 389

FIGURE 1 : La suite de polygones.

Bibliographie

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6^e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cephadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Cours d'algèbre

[PER]

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.