Leçon N° 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

On se place dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

I - Mesure et intégrale de Lebesgue :

1) Rappels sur la mesure de Lebesgue :

Théo. 1: Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation $(\forall (a,A) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(a+A) = \lambda(A))$ et coïncidant sur les compacts de $\mathbb{R}$ avec la longueur ($\forall a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$, $\lambda([a,b]) = b-a$). On appelle cette mesure λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Déf. 2: $N \subseteq \mathbb{R}$ est dit négligeable s'il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A)=0$ et $N \subseteq A$. On pose $\mathcal{N}_\lambda := \{N \subseteq \mathbb{R} \mid N \text{ négligeable}\}$

Prop. 3: Il existe $N \subseteq \mathbb{R}$ négligeable non borélien

Théo. 4: • La tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{N}_\lambda$ est de la forme $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), N \in \mathcal{N}_\lambda\}$, on l'appelle la tribu de Lebesgue ou complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par λ

• On pose $\forall (A,N) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{N}_\lambda$, $\bar{\lambda}(A \cup N) := \lambda(A)$. Cette mesure est l'unique prolongement possible de λ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

Note: On appelera et notera toujours λ la mesure complétée de Lebesgue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et on se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$

2) Définition de l'intégrale de Lebesgue :

Déf. 5: • On définit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive $f := \sum_{i \in I} \alpha_i A_i$ avec I fini, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ par $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda := \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda(A_i) \in [0; +\infty[$

• Si maintenant f est mesurable positive, on pose $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} s \, d\lambda \mid s \text{ étagée positive et } s \leq f\right\} \in [0; +\infty]$

On dira alors que f est λ-intégrable si $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda < \infty$

Théo. 6: [CV monotone] Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors si $f := \lim_{n \to +\infty} f_n$, f est mesurable positive et $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$

Prop. 7: L'intégrale est une forme linéaire croissante sur l'ensemble des fonctions mesurables positives

Théo. 8: [Lemme de Fatou] Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives, alors $0 \leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_n f_n \, d\lambda \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$

II - Fonctions Lebesgue-intégrables :

1) Espace $\mathcal{L}^1(\lambda)$:

Déf. 9: $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite λ-intégrable si $|f|$ est λ-intégrable. On pose $\mathcal{L}^1(\lambda)$ l'ensemble des fonctions λ-intégrables

Prop. 10: On pose $f^{\pm} := \max(\pm f, 0)$ qui est mesurable positive et λ-intégrable si $|f|$ l'est d'où on peut définir l'intégrale de f par $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\lambda$. Dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$, $f = g$ λ-p.p. $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.

Rq. 11: Les résultats de la Prop. 7 restent vrais dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$

2) Théorèmes de convergences :

Théo. 12 : [CV dominée] Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
$\star$ $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ λ-p.p. et $\star$ $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda)$, $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ λ-p.p. alors $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\lambda = 0$

App. 13 : Si $I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$ alors $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{sinon} \end{cases}$

Théo. 14 : [Fubini - Tonelli] Soit $f : (X\times Y, \lambda\otimes\lambda) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, Alors $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx$ sont mesurables et $\int_{X\times Y} f\, d(\lambda\otimes\lambda) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)$

Théo. 15 : [Fubini - Lebesgue] Soit $f \in \mathcal{L}^1(\lambda\otimes\lambda)$, alors λ-p.p. $y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, $x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\int_{X\times Y} f\, d(\lambda\otimes\lambda)$
$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dx$

App. 16 : On a pour tout $\alpha \in]0;+\infty[$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

3) Généralisation de l'intégrabilité selon une mesure :

Rq. 17 : La méthode utilisée pour construire l'intégrale de Lebesgue se généralise à $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Ex. 18 : Si on se place dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ avec m la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors les fonctions m-intégrables sont exactement les séries absolument convergentes :
$\mathcal{L}^1(m) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty \right\} := \ell^1(m)$

Prop. 19 : Si $(u_{n,m})_{n,m} \in \ell^1(m\otimes n)$, $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|$

III - Espaces $L^p(\lambda)$ pour $p \in [1;+\infty]$:

Sauf indication contraire, on considère $p \in [1;+\infty]$ et $q \in [1;+\infty]$ son exposant conjugué c'est-à-dire tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

1) Construction et premières propriétés :

Déf. 20 : • Pour $p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(\lambda) := \{ f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable $\mid \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda < \infty \}$ et si $f \in \mathcal{L}^p(\lambda)$, $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$
• On note $\mathcal{L}^\infty(\lambda) := \{ f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable $\mid \exists C \geq 0$, $|f(x)| \leq C$ λ-p.p. $\}$ et si $f \in \mathcal{L}^\infty(\lambda)$, $\|f\|_\infty := \inf\{ C \mid |f(x)| \leq C \ \lambda\text{-p.p.}\}$

Prop. 21 : Si on a $\lambda(X) < \infty$, $1 \leq p \leq r \leq \infty \Rightarrow \mathcal{L}^r(X,\lambda) \subset \mathcal{L}^p(X,\lambda)$

C. ex. 22 : On a $\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathcal{L}^1(\lambda) \setminus \mathcal{L}^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in \mathcal{L}^2(\lambda) \setminus \mathcal{L}^1(\lambda)$

Prop. 23 : [Inégalité de Hölder] Soit $f \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\lambda)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Coro. 24 : En notant $L^p(\lambda) := \mathcal{L}^p(\lambda)/\sim$ où $(f\sim g) \Leftrightarrow (f = g \ \lambda\text{-p.p.})$
$(L^p(\lambda), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé

Théo. 25 : [Riesz - Fischer] $(L^p(\lambda), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

DEV 1

Prop. 26: Soit $(f_n)_n \in L^p(\lambda)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p(\lambda)$ tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$, alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_k$ vérifiant $f_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{\lambda\text{-p.p.}} f$ et $\exists h \in L^p(\lambda), \forall k \in \mathbb{N}, |f_{\varphi(k)}(x)| \leq h(x)$ λ-p.p.

2) Convolution et régularisation :

Déf. 27: Si cela a un sens, on définit $f * g$ la convolée de f par g par $\forall x \in \mathbb{R}, (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy$

Théo. 28: On peut définir $f * g$ dans les deux cas suivants :

- $f \in L^1(\lambda), g \in L^p(\lambda)$: on a $f*g \in L^p(\lambda)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
- $f \in L^p(\lambda), g \in L^q(\lambda)$: on a $f * g \in L^\infty(\lambda)$ et uniformément continue et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Si $p \notin \{1;+\infty\}$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f*g)(x) = 0$

Prop. 29: Il n'existe pas de $f \in L^1(\lambda)$ telle que $\forall g \in L^1(\lambda), f*g = g$

Déf. 30: On appelle approximation de l'unité toute suite $(\varphi_n)_n \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) \geq 0$ λ-p.p., $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\lambda = 1$ et $\forall \eta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|x|>\eta} \varphi_n(t)\, dt = 0$

Elle est dite régularisante si $(\varphi_n)_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

Ex. 31: Si on pose $\forall s > 0$, $\gamma_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$, alors $(\gamma_{s^{-1}})_{s>0}$ est une approximation de l'unité régularisante

Théo. 32: Soit $f \in L^p(\lambda)$ avec $p < \infty$ et $(\varphi_n)_n$ est une approximation de l'unité régularisante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$

Coro 33: Pour $p < \infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\lambda)$

3) Transformée de Fourier dans $L^1(\lambda)$:

Déf. 34: Soit $f \in L^1(\lambda)$, on définit la transformée de Fourier de f par $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$

- L'application $\mathcal{F} : f \in L^1(\lambda) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est la transformation de Fourier dans $L^1(\lambda)$

Lemme 35: [Riemann-Lebesgue] Soit $f \in L^1(\lambda)$, alors $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Prop. 36: $\mathcal{F} : (L^1(\lambda), \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est linéaire continue

Ex. 37: Soit $a > 0$, $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2}) : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$ DEV 2

Prop. 38: Pour tous $f, g \in L^1(\lambda)$, $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Théo. 39: [Formule de dualité] Soit $f, g \in L^1(\lambda)$, alors on a $\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}(u)\, du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) g(v)\, dv$

Théo. 40: La transformation de Fourier dans $L^1(\lambda)$ $\mathcal{F} : f \in L^1(\lambda) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective DEV 2

Rq. 41: On peut retrouver le résultat de la Prop. 29

Théo. 42: Soit $f \in L^1(\lambda)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\lambda)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$