Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.

1 Généralités

Définition 1. *On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ appelée somme partielle d'ordre n. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) notée $\sum_n u_n$.*
La série $\sum u_n$ est dite converge si (S_n) est converge, dans ce cas on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite appelée la somme de la série, et $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}$ appelé le reste de la série d'ordre n.

Exemple 1. *Pour $a \in \mathbb{C}$, on a $\sum_n a^n$ est une série convergente si, et seulement si $|a| < 1$.*

Proposition 1. *Si $\sum_n u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La réciproque est en général fausse.*

Exemple 2. *La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.*

Définition 2. *une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente, si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Proposition 2. *Une série absolument convergente est convergente.*

Remarque 1. *La réciproque de la proposition précédente est en général fausse, en effet si $u_{2p} = \frac{1}{p}$ et $u_{2p+1} = \frac{-1}{p}$, alors $\sum u_n$ converge, mais elle n'est pas absolument convergente. Dans ce cas on dit que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.*

2 Séries à termes positifs

Dans cette section $(v_n), (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

Lemme 1. *La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si (S_n) est majorée. Sinon $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème 1. *Supposons qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$, alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est aussi converge.*
2. *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ est aussi diverge.*

Exemple 3. *pour tout $n \geq 2$, on a :*

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

alors la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 2. *Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors :*

1. *les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.*
2. *Si $\sum u_n$ converge, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$.*
3. *Si $\sum u_n$ diverge, on a $\sum_{k=0}^{n} u_n \sim \sum_{k=0}^{n} v_n$.*

Proposition 3 (Critère de Riemann)**.** *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge ssi $\alpha > 1$.*

Théorème 3. *Si $u_n = O(v_n)$, alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Application 1. *On a la formule de Stirling :*

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

Théorème 4. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante. Alors $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature.*

Application 2. *Pour $\alpha > 1$, on a*

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

Développement 1. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :*

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

où $\gamma > 0$.

Théorème 5 (Critère de Bertrand)**.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.*

3 Série de nombres complexes

3.1 Règle de Cauchy et D'Alembert

Dans cette section $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 6 (Cauchy)**.** *Soit $L = \limsup \sqrt[n]{|u_n|}$. On a*

1. *si $L < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
2. *si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Remarque 2. *Lorsque $L = 1$, on peut rien dire. En effet si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $L = 1$ et $\sum u_n$ diverge.*
Par ailleurs si $u_n = \frac{1}{n^2}$, on aussi $L = 1$, mais $\sum u_n$ converge.

Théorème 7 (D'Alembert)**.** *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, on note $L = \limsup \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. On a*

1. *si $L < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
2. *si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Application 3. *Soit $a > 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a^n}{n}$. Alors la série $\sum u_n$ converge ssi $a < 1$.*

3.2 Produit de Cauchy

Théorème 8. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergent absolument. On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ (appelée produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$) est absolument convergente, et on a :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)}$$

Application 4. *Pour tout $z, z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\boxed{\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')}$$

Remarque 3. *Si l'une des deux série est seulement convergente, alors la série $\sum c_n$ est convergente et a pour somme le produit des sommes.*

3.3 Séries alternées

Théorème 9. *Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge et le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.*

Théorème 10 (Abel)**.** *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$ où :*

- *(α_n) positive, décroissante et tendant vers 0.*
- *La suite des sommes partielles associée à (v_n) $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ est bornée.*

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 4. *Si (α_n) décroissante et tendant vers 0. Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ converge.*

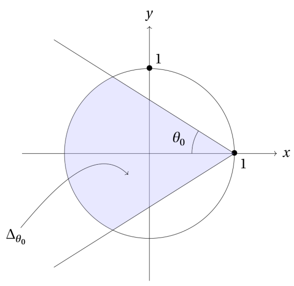
Remarque 4. *On retrouve le résultat du théorème 9, avec $\alpha_n = a_n$ et $v_n = (-1)^n$.*

Théorème 11 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On définit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et*

$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \exists |\theta| \leq \theta_0 \ / \ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$



Remarque 5. *La réciproque est fausse, par exemple $\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$, mais $\sum(-1)^n$ diverge.*

Théorème 12. *(Taubérien faible) Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq 1$ et f la somme de cette série sur $D(0,1)$, on suppose que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et a pour somme S.*

Application 5. *Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et $\sum c_n$ converge, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors on a :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)}$$

Définition 3. *On dit la série $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*

Théorème 13. *Pour qu'une série soit commutativement convergente, il faut et il suffit qu'elle soit absolument convergente. La somme alors ne change pas quand on change l'ordre des termes.*

Développement 2. *Supposons que $\sum u_n$ est semi-convergente. Alors pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = l}$$

Application 6. *L'ensemble $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.*

références :

1. X. Gourdon les maths en tête, analyse.
2. Francinou, Gianella, Nicolas Oraux X-ENS Analyse 1.