Leçon 246 : SERIES DE FOURIER. Exemples et applications

Dans toute cette leçon, on notera $C_0^{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques et $C_m^{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ celui des fonctions qui sont continues par morceaux et 2π-périodiques.

I) Définitions et premières propriétés :

Définition 1 : On appelle polynôme trigonométrique de degrés $\leq N$ ($N\in\mathbb{N}$) toute fonction de la forme $x\mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ ($c_n\in\mathbb{C}$).

Définition 2 : On appelle série trigonométrique, une série de fonctions de la forme $x\mapsto c_0+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}$. On la note $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Définition 3 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\in \mathcal{C}_m^{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on appelle coefficients de Fourier les complexes définit par : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, on appelle coefficients de Fourier réels ceux définies par :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

[1] **Définition 4** : On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ ou encore
$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)$

Remarque 5 : Les coefficients de Fourier vérifient les relations :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=i(c_n(f)-c_{-n}(f))$

Remarque 6 : Si f est paire alors $b_n(f)=0$ et si f est impaire, alors $a_n(f)=0$.

Propriété 7 : Soit $f\in C_m^{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$; $a\in\mathbb{R}$; $n\in\mathbb{Z}$, alors :
1) $c_n(\check{f})=c_{-n}(f)$ où $\check{f}:x\mapsto f(-x)$
2) $c_n(\bar{f})=\overline{c_{-n}(f)}$ 3) $c_n(\tau_a f)=e^{-ina}c_n(f)$
4) Si de plus f est continue et C^1 par morceaux, alors $f'\in C_0^{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $c_n(f')=in\,c_n(f)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.

II. Convergence :

1) L'espace préhilbertien D :

Notation 8 : On note D l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π périodiques, continue par morceaux et vérifiant :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

Propriété 9 : L'ensemble D muni de la loi d'addition et de multiplication par un nombre complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriété 10 : L'application $\langle\cdot;\cdot\rangle : D^2\to\mathbb{C}$, $(f;g)\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)dt$ définit un produit scalaire sur D. On note $\|\cdot\|_2$, la norme issue de ce produit scalaire.

Notation 11 : $\forall k$ élément de $\mathbb{Z}$, on note e_k, l'élément de D défini par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e_k(x)=e^{ikx}$.

Notation 12 : On note P le sous-espace vectoriel de D engendré par la famille des $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Notation 13 : Pour tout entier naturel n, on note P_n le sous-espace vectoriel de D engendré par la famille $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$.

Notation 14 : Pour tout f éléments de D, on note $\forall k\in\mathbb{Z}$, $c_k(f)=\langle e_k;f\rangle$

Proposition 15 : 1) La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée. [2]
2a) Pour tout entier naturel n, on a : $D=P_n\oplus P_n^{\perp}$.
b) La projection orthogonale p_n sur P_n vérifie : $\forall f\in D$, $p_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e_k$.
3) $\forall f\in D$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f-p_n(f)\|_2=\inf_{g\in P_n}\|f-g\|_2$.
4) (Inégalité de Bessel) Pour tout élément f de D, les séries $\sum_{n\geq 1}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1}|c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes avec :
$$|c_0(f)|+\sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt.$$

Corollaire 16 : Pour tout f élément de D, la suite définie pour tout entier naturel n par $\|f-p_n(f)\|_2$ est positive et décroissante.

Théorème 17 : Pour tout élément f de l'espace préhilbertien D, la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans cet espace vers f.

Théorème 18 : (Egalité de Parseval) Soit f un élément de D. Les séries $\sum_{n\geq 1}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1}|c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes avec :
$$|c_0(f)|+\sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$$

Application 19 : On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définit par : $\begin{cases} \forall t\in\mathbb{R},\ P_0(t)=1 \\ \forall n\geq 1,\ P_n' = P_{n-1} \\ \forall n\geq 1 : \int_0^1 P_n(t)\,dt = 0 \end{cases}$

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$; $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^4$; $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^6$; $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(2n-1)^6$

2) Noyau de Fejer et Dirichlet : (Dev 1)

Définition 20 : Soit $N\in\mathbb{N}$, le noyau de dirichlet d'ordre N est la fonction D_N définit sur $\mathbb{R}$ par : $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n(x)$

Proposition 21 : 1) La fonction D_N est paire et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt = 1$.

2) On a $D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_N(x) = 2N+1$ sinon.

3) Pour $x\in[-\pi;\pi]$, on a $D_N(x) = \frac{2\sin(Nx)}{x} + r_N(x)$ avec $\sup_{\substack{|x|\leq\pi \\ N\in\mathbb{N}}} r_N(x) < +\infty$.

4) On a $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln(N) + O(1)$ pour $N\to+\infty$.

Définition 22 : Soit $N\in\mathbb{N}^*$, le noyau de Fejer d'ordre N est la fonction $K_N : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$.

Pour $f\in L^2$, 2π-périodiques, on définit la somme de Fejer d'ordre $N\in\mathbb{N}$ par : $\sigma_N(f) : x\mapsto (K_N * f)(x)$.

Proposition 23 : Soit $N\in\mathbb{N}^*$: 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 & \text{si } x\notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier, la fonction K_N est positive sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\|K_N\|_1 = 1$.

3) Cas L^2 : Théorème de convergence de Dirichlet :

Proposition 24 : Soit $f\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, 2π-périodiques et $N\in\mathbb{N}$. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: la série de fourier de f évaluée en x qui vaut $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\,dt$

Théorème 25 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, 2π périodiques. On suppose que f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x\in\mathbb{R}$, $f\in D$, et les quantité $\lim_{t\to x_-}\frac{f(t)-f(x_-)}{t-x_-}$ et $\lim_{t\to x_+}\frac{f(t)-f(x_+)}{t-x_+}$ existent.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$.

4) Théorème de convergence de Fejer :

Notation 26 : On note $L^p_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions L^p, 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 27 : Pour $f\in C^{2\pi}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $f\in L^p_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ avec $p\in[1;+\infty[$, $N\in\mathbb{N}$, le produit de convolution $\sigma_N(f) = K_N * f$ est bien définit.

De plus, ce produit appartient aux mêmes espaces que f :

↳ Si $f\in L^p_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$: $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|K_N\|_1\|f\|_p$

↳ Si $f\in C^{2\pi}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$: $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|K_N\|_1\|f\|_\infty$.

a) Cas Continue :

Théorème de Fejer : cas continu (28) : Soit $f\in C^{2\pi}_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. On a alors les deux conclusions suivantes : (1) Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

(2) : $\|f-\sigma_N(f)\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

b) Cas L^p :

Théorème 29 : (Fejer Cas L^p $p\geq 1$) : On a alors les deux conclusions suivantes : (1) : Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$

(2) : $\|f-\sigma_N(f)\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Application 30 : Soit f la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[0;2\pi[$ vaut $f|_{[0;2\pi[} : x\mapsto (x-\pi)^2$, en considerant $f(0)$ et $f(\pi)$ montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Remarque 31 : En considérant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n 2π-periodique dont la restriction à $[0;2\pi[$ est définie par : $f_n|_{[0;2\pi[} : x\mapsto (x-\pi)^{2n}$, et en nommant $(c_{n,k})$ la famille de ses coefficients de Fourier, on peut obtenir pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, et $n\in\mathbb{N}^*$ la relation suivante : $c_{n+1,k} = \frac{2(n+1)}{k^2}\pi^{2n} - \frac{(2n+2)(2n+1)}{k^2}c_{n,k}$

Cette relation permet alors par reccurence, le calcul des valeurs de $\zeta(2n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. C'est ainsi que l'on trouve par exemple $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

III. Application à d'autres domaines :

Théorème 32 : Soit $\lambda>0$ et $\lambda_1;\dots;\lambda_n\in\mathbb{R}$, distincts et tels que $\max|\lambda_j|\leq\lambda$; soit $a_1;\dots;a_n\in\mathbb{C}$ et $h(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}$ $(t\in\mathbb{R})$ alors :

$$\|h'\|_\infty \leq \lambda\|h\|_\infty$$ (Inégalité de Bernstein)

Théorème 33 : (Inégalité isopérimétrique) Soit $[a;b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de longueur L et enfermant une surface S. Alors :

(1) : $L^2 \geq 4\pi S$ (2) : $L^2 = 4\pi S \iff \gamma$ définit un cercle parcouru une fois.

Théorème 34 : (Résolution de l'Equation de la chaleur par les série de Fourier)

Soit $u_0 \in L^2([0;2\pi])$ dont on note d_n les coefficients de Fourier pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
(1) : à $t > 0$ fixé, la fonction $u(t;\cdot)$ est 2π-périodique,
(2) : les fonctions $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
(3) : Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\partial_t u = \Delta_x u$
(4) : $u(t;\cdot)$ converge en norme $L^2([0;2\pi])$ vers u_0 lorsque $t \to 0$.] (Dev 2) [3]

Références : [1] Gourdon Analyse.
[2] Jean-François Dantzer, Mathématiques pour l'agrégation analyse et probabilités.
[3] Hervé Queffélec, Claude Zuily, analyse pour l'agrégation.
[4] Thèmes pour l'agrégation de Mathématiques, Hautari.