Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemple et applications.

Déf 1 : Soient X une partie d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$, a un point de X, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction

(i) On dit que f admet en a un maximum global si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X$.

(ii) On dit que f admet un maximum local s'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X \cap V$.

(iii) On dit que f admet un maximum strict (global, resp. local) si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq a$.

Rq 2 : Les définitions correspondantes d'un minimum global, resp. local, resp. strict, s'en déduisent en renversant le sens des inégalités.

Déf 3 : Le terme d'extremum signifie maximum ou minimum

I) Existence d'extremums

1) Utilisation de la compacité

Prop 4 : Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ une application continue où (E,d) est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes (i.e il existe $c, d \in E$ tels que $f(c) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$, $f(d) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$)

Déf 5 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est coercive si $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

Application 6 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Ex 7 : Soit (E,d) un espace métrique. Soient K_1, K_2 deux compacts de E. Il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$

Ex 8 : Soit (E, d) un espace métrique, K un compact de E et F un fermé de E tels que $F \cap K = \emptyset$. Alors $d(F, K) \neq 0$

2) Cas particulier d'une fonction convexe

Cadre 9 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$

Déf 10 : $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in U$, pour tout $t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y)$

Rq 11 : Une fonction convexe est au dessus de toutes ses cordes.

Prop 12 : On suppose f différentiable sur U. Alors f est convexe sur U si et seulement si $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x)$ pour tout $x, y \in U$

Rq 13 : La prop 12 dit que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes

Thm 14 : On suppose ici $Df(a) = 0$. Alors la fonction f admet en a un minimum global sur U.

3) Cas des espaces de Hilbert

Cadre 15 : Soit E un espace de Hilbert et l'on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ sa norme et d la distance définie par cette dernière.

DEV 1

Thm 16 : Soit C une partie fermée, convexe et non vide de E. Alors, pour tout point x de E, il existe un unique point y de C tel que $\|x - y\| d(x, C)$

Ce point, appelé projection de x sur C et noté $p_C(x)$ est caractérisé par

$(*)$ $y \in C$, $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}(x - y | z - y) \leq 0$

Prop 17 : Sous les hypothèses du théorème 16, on a $\forall x_1, x_2 \in E$ $\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

En particulier, p_C est continue

Prop 18 : Soit F un sev fermé de E. Alors P_F est un opérateur linéaire de E sur F. Si $x \in E$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

Coro 19 : Pour tout sev fermé F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$ et le projecteur sur F associé à cette somme directe est P_F.

Coro 20 : Pour tout sev F de E, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Thm 21 : (Théorème de Riesz) L'application de E dans E' définie par $y \mapsto \phi_y = (\cdot | y)$ est une isométrie surjective. En d'autres termes, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E, il existe un unique $y \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = (x | y)$$

Et de plus $\|\phi\| = \|y\|$

Application 22 : (Optimisation dans un Hilbert) Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et coercive. Alors il existe $a \in E$ tel que

$$J(a) = \inf_E J$$

4) Fonctions holomorphes

Cadre 23 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur U.

Déf 24 : On dit que f a un maximum relatif en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a dans U tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in V$.

Déf 25 : On dit que f vérifie le principe du maximum dans U si elle est constante au voisinage de tout point $a \in U$ en lequel elle a un maximum relatif.

Rq 26 : Si U est supposé connexe et que f admet un maximum relatif en un point de U et vérifie le principe du maximum, alors f est constante.

Prop 27 : Une fonction holomorphe vérifie le principe du maximum.

Application 28 : (Lemme de Schwarz) Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorphe vérifiant $f(0)=0$. On a

(i) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$

En outre, s'il existe $z \neq 0$ tel que $|f(z)| = |z|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0,1)$.

Application 29 : L'ensemble $Aut(D)$ est constitué des applications $\lambda \varphi_a$, avec $|\lambda| = 1$ et $a \in D$. ($\varphi_a : z \mapsto \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$)

II) Caractérisation des extremums

1) À l'ordre 1

Thm 30 : Soit U un ouvert d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et soit $a \in U$. Si f admet un extremum local en a, et si $Df(a)$ existe, alors nécessairement a est un point critique de f, ie $Df(a) = 0$

Contre-ex 32 : $f : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ admet un minimum en 0 mais $f'(0) = 1 \neq 0$.

Application 33 : (Théorème de Rolle) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ vérifiant (i) f continue sur $[a;b]$, (ii) f dérivable sur $]a;b[$, (iii) $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application 34 : (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2) À l'ordre 2 :

Thm 35 : Sous les mêmes hypothèses que le thm 30 on a :

(i) Condition nécessaire (mais pas suffisante) du second ordre : si f admet en a un minimum (resp. maximum) local et si $Df^2(a)$ existe, alors nécessairement $Df(a) = 0$ et $Df^2(a)$ est une forme quadratique positive (resp négative), ie $D^2f(a)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.

(ii) Condition suffisante (mais pas nécessaire, du second ordre) : si E est de dimension finie, et si $Df(a)$ est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict en a.

3) Extremums sous contraintes

Thm 36 : (Théorème des extremums liés) Soient $f, g_1 \dots g_r$ des fonctions $\mathcal{C}^1(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On désigne par Γ l'ensemble $\{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dg_{i,a}$

Appli 37 : (Inégalité arithmético-géométrique) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $s > 0$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n \end{cases}$ et $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = s\}$

En étudiant $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\}$ où $g : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$

on trouve $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

DEV2

III) Problème d'extremums

1) Recherche de point critique

Thm 38 : (méthode de Newton) Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose
(i) $c < d$ (ii) $f(c) < 0 < f(d)$ (iii) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c;d]$
On considère la suite récurrente $x_0 \in [c;d]$, $x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$
Alors, en notant a l'unique 0 de f on a
(i) Pour $\alpha > 0$ assez petit, pour tout $x_0 \in [a-\alpha; a+\alpha]$, (x_m) converge vers a à l'ordre deux.
(ii) On suppose de plus $f'' > 0$. Alors l'intervalle $[a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in [a;d]$, (x_m) est strictement décroissante (ou constante) avec

$$0 \leq x_{m+1} - a \leq C(x_m - a)^2$$

$$x_{m+1} - a \underset{m \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_m - a)^2$$

Ex 39 : On fixe $y > 0$. On prend $f(x) = x^2 - y$. L'application de la méthode de Newton permet de trouver une racine carrée de y.

2) Inégalité isopérimétrique

Thm 40 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ admettant un paramétrage $([a;b], f)$ vérifiant :
1) $f(a) = f(b)$
2) $f_{|[a;b[}$ injective
3) f de classe $\mathcal{C}^1$ et f' ne s'annule pas.
Soit A l'unique composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. Alors, on a :
- la longueur L de la courbe $\mathcal{C}$ vérifie $L^2 \geq 4\pi\lambda(A)$ aire de A
- $L^2 = 4\pi\lambda(A)$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est un cercle.

Rq 41 : Le thm précédent nous dit qu'à longueur fixée parmi les courbes fermées, le cercle est celle qui enserre l'aire maximale.

Annexe :

Figure 1 : fonction coercive

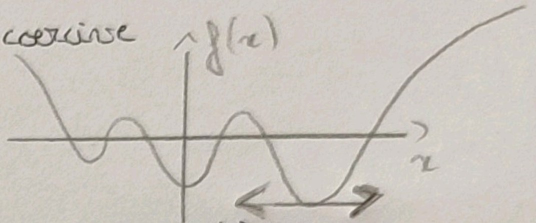

Figure 2 : théorème de projection

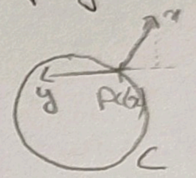

Figure 3 : théorème de Rolle

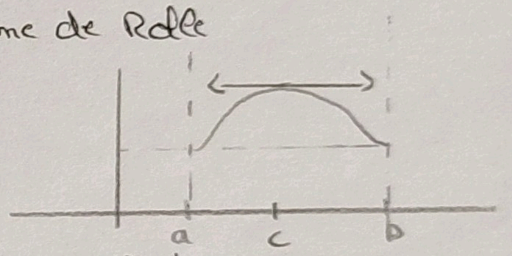

Figure 4 : méthode de Newton