Leçon 156 : Exponentielles de matrices. Applications

Cadre 0 : soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $M_m(\mathbb{K})$ muni de $\|.\|$ une norme d'algèbre : $\forall A,B \in M_m(\mathbb{K})\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

I) Généralités

Déf 1 : Pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$, on définit l'exponentielle de A par
$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

Prop 2 : La fonction exp : $M_m(\mathbb{K}) \to M_m(\mathbb{K})$, $A \mapsto e^A$ est continue.

Prop 3 : (a) Pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$, A et e^A commutent

(b) Si B et A sont dans $M_m(\mathbb{K})$ et commutent, alors
$$e^{A+B} = e^A e^B$$

(c) Pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

(d) Pour tout $P \in GL_m(\mathbb{K})$, pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$,
$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$$

Prop 4 : Pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$, $Sp(e^A) = e^{Sp(A)}$

De plus, $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$

Thm 5 : Pour tout $A \in M_m(\mathbb{K})$, e^A est un polynôme en A.

II) Calcul de l'exponentielle

II-1) Cas d'une matrice diagonalisable

Prop 6 : Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $P \in GL_m(\mathbb{K})$ où
$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$
alors $e^A = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m})P^{-1}$

II-2) Décomposition de Dunford

Thm 7 : Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. Il existe $D, N \in M_m(\mathbb{K})$ telles que
(i) D diagonalisable, N nilpotente
(ii) $DN = ND$
(iii) $A = D + N$

De plus, D et N sont uniques (et sont des polynômes en A).

DEV 1

Prop 8 [Application à l'exponentielle] Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$.

a) Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A, alors celle de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_m)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_m)$ nilpotente

b) A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Rq 9 : Avec les notations du théorème précédent, la décomposition de Dunford permet de réduire le calcul de e^A à deux cas plus faciles : si $A = D + N$ on a $e^A = e^D e^N$ car $DN = ND$. De plus

(i) e^D est donnée par la proposition 6

(ii) $e^N = I_m + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}$ où r est l'indice de nilpotence de N.

II-3) Décomposition de Jordan

Déf 10 : Un bloc de Jordan de taille r associé à λ est une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} J_{r_1,\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_A,\lambda} \end{pmatrix} = J_{r,\lambda} \in M_r(\mathbb{K})$ avec $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_A < r$

- $r_1 + \dots + r_A = r$
- $J_{r_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{r_i}(\mathbb{K})$ $1 \leq i \leq A$

Thm 11 : Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_A$. Alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_r} \end{pmatrix}$. Cette décomposition est unique après numérotation des blocs de Jordan.

Prop 12 : Pour tous $\lambda, t \in \mathbb{K}$ et $r \geq 1$ on a
$$e^{tJ_{r,\lambda}} = e^{\lambda t} e^{tJ_{r,0}} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Rq 13 : La proposition précédente permet de se ramener aux blocs de Jordan associés à 0.

DEV 2

DEV2

III) Propriétés d'injectivité et de surjectivité

III-1) Cas des matrices réelles et complexes

Prop 14 : a) Pour tout $n \geq 1$ exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective

b) Pour tout $n \geq 2$ exp : $M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective.

Lemme 15 : L'exponentielle est différentiable en $0_{M_n(\mathbb{C})}$ et $d\exp(0) = I_n$.

Thm 16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ exp : $\begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \\ A \mapsto e^A \end{cases}$ est surjective.

Thm 17 : On a $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2$

Contre-ex 18 : Le théorème 16 devient faux en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$: pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp(M)) > 0$ donc $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$

De plus, $\exp(M_n(\mathbb{R})) \neq GL_n^+(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ mais pas dans $\exp(M_n(\mathbb{R}))$

III-2) Cas des matrices symétriques et hermitiennes

Lemme 19 : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $|||S|||_2 = \rho(S)$

Thm 20 :

a) L'application exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

b) L'application exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Thm 21 : [Décomposition polaire] L'application $GL_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $O, S \mapsto OS$ est un homéomorphisme

IV) Applications aux équations différentielles

IV-1) Généralités

Cadre 22 : On considère un système différentiel du premier ordre dans $\mathbb{K}^n$ de forme

$$\frac{dy}{dt} = A\,y \quad \text{(sans second membre)}$$

où $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est la fonction inconnue

et $A(t) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(C) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = A\,y \\ y(t_0) = y_0 \quad (t_0 \in I) \end{cases}$$

(*)

Thm 24 : La solution du problème (C) est donnée par $y(t) = e^{(t-t_0)A}\,y_0$

Thm 25 : [Comportement asymptotique des solutions] Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de la matrice A considérée dans le problème (C). Alors les solutions du système linéaire $y' = Ay$ sont

- asymptotiquement stables si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$
- stables si et seulement si pour tout j, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

(*) **Thm 23 :** [Cauchy-Lipschitz linéaire] Il existe une unique solution au problème (C).

Lemme 26 : Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.

(suite lemme 26) Alors, il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout t positif ou nul, on ait $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

Appli 27 : [Equation de Sylvester]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négatives. Alors, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation
$$AX + XB = C$$
admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Thm 28 : [Théorème de Liapounov]
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle
$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
On suppose que $A = Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre stable du système : pour tout y_0 suffisamment proche de 0, la solution maximale $y(t)$ est bien définie et tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

IV-2) Wronskien d'une famille de solutions

Déf 29 : Le wronskien d'une famille $y_1 \cdots y_n$ de solutions de $(E_0) : y' = A(t)y$ est
$$w(t) = \det(y_1(t), \cdots, y_n(t))$$

Lemme 30 : Pour tous $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$D\det(X) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$$

Thm 31 : Pour tout $t \in I$, $w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right) w(t_0)$

Corollaire 32 : $\exists t_0 \in I, w(t_0) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, w(t) = 0$

Rq 33 : dans le cas où A est indépendante de t, on retrouve $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}$.