

246 Séries de Fourier. Exemples et applications

Soit $m, N \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$, $k \in \mathbb{N}^*$

I Coefficients et série de Fourier

A Espaces de fonctions périodiques QZ 4.1.2

Définition 1: $C_{2\pi}$ désigne l'ensemble des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques.

Exemple 2: $\sin \in C_{2\pi}$.

Proposition 3: $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Définition 4: L^p désigne l'espace vectoriel des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques mesurables, telles que $\|f\|_p < \infty$ avec $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|f\|_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Définition 5: e_n désigne la fonction $t \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par les e_n .

Remarque 6: Un élément P de $\mathcal{P}$ est une somme finie $\sum a_n e_n$ (où $a_n \in \mathbb{C}$) et s'appelle un polynôme trigonométrique.

Exemple 7: $\cos = \frac{1}{2}(e_{-1} + e_1) \in \mathcal{P}$.

X.G. ex. 55.1
MEA 6.3

B Définitions des coefficients de Fourier et des séries de Fourier. QZ 4.1.2

Définition 8: Soit $f \in L^1$ et $m \in \mathbb{Z}$, on définit le m -ième coefficient de Fourier de f par la formule: $c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} dt$

et on note $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$

Remarque 9: Si f est à valeurs réelles, on peut s'intéresser aux coefficients de Fourier trigonométriques: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt$

Proposition 10: En posant $b_0(f) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} c_m(f) = \frac{a_m(f) - ib_m(f)}{2} \\ c_{-m}(f) = \frac{a_m(f) + ib_m(f)}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_m(f) = c_m(f) + c_{-m}(f) \\ b_m(f) = i(c_m(f) - c_{-m}(f)) \end{cases}$$

Proposition 11: f paire $\Rightarrow a_m(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos mt dt$ et $b_m(f) = 0$
 f impaire $\Rightarrow a_m(f) = 0$ et $b_m(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin mt dt$.

Exemple 12: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2}$, $n \geq 1$ et $b_m = 0 \forall m$.

Définition 13: La série de Fourier de f est la série de fonctions $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

C Propriétés des coefficients de Fourier QZ 4.1.3

Proposition 14: Soit $f \in L^1$. Alors avec $T_a f(t) = f(t+a)$:
 $\lim_{a \rightarrow 0} \|T_a f - f\|_p = 0$

Proposition 15: Soit $f \in L^1$, $a \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $g \in L^\infty$. Alors:
i) $c_m(\tilde{f}) = c_m(f)$ (où $\tilde{f}(t) = f(-t)$)
ii) $c_m(\tilde{f}) = \overline{c_{-m}(f)}$
iii) $c_m(T_a f) = e^{-ima} c_m(f)$
iv) $c_m(e_k f) = c_{m-k}(f)$
v) $f * e_n = c_n(f) e_n$
vi) $\|f * g\|_0 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

Proposition 16: Soit $f \in C_{2\pi} \cap L^1$ et C^1 par morceaux. Alors on a $c_m(f') = im c_m(f)$.

Proposition 17: Soit $f \in L^1$, si $\sum_{n=-N}^N \alpha_n e_n$ converge uniformément vers f alors $f \in C_{2\pi}$ et $\alpha_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 18 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in L^1[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0$$

$L^1 \rightarrow \mathbb{C}$

Proposition 19: L'application $\gamma: f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un homomorphisme d'algèbre de norme 1 (ie linéaire et $\gamma(f * g) = \gamma(f) \gamma(g)$).

II Convergence des séries de Fourier

A Noyau de Dirichlet et de Fejér QZ 4.2.2 4.2.3

Définition 20: Le noyau de Dirichlet est $D_N = \sum_{-N}^N e^{inx}$

Proposition 21: Le noyau de Dirichlet D_N vérifie :

i) D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

ii) $D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin \frac{x}{2}}$

iii) $S_N(f) = f * D_N, \forall f \in L^1, \forall N \geq 0$.

Définition 22: Le noyau de Fejér d'ordre N est $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$

Remarque 23: Il s'agit de la suite des moyennes de Cesàro du noyau de Dirichlet.

Proposition 24: Le noyau de Fejér K_N vérifie :

i) $K_N = \sum_{-N}^N (1 - \frac{|m|}{N}) e^{imx}$; $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2} \right)^2 \geq 0$

ii) $\|K_N\|_1 = 1$; iii) $0 < \delta \leq \pi \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x) dx = 0$

iv) $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{-N}^N (1 - \frac{|m|}{N}) c_m(f) e^{imx}$ (avec $\sigma_N(f) = \frac{S_0(f) + \dots + S_{N-1}(f)}{N}$)

B Première difficulté et solution de Fejér X.G.A QZ 4.3.1 4.3.2 4.3.3

Théorème 25 (Banach - Steinhaus) Soit E un Banach et F un E - F espace. Soit $H \subset L_c(E, F)$, alors ou bien $\{\|f\|\}_{f \in H}$ est borné ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Corollaire 26: Il existe $f \in C_{2\pi}$ tel que $\sup |S_N(f)(0)| = +\infty$. En particulier, la suite $S_N(f)$ des sommes de Fourier de f ne converge en 0.

Développement (Théorème de convergence de Fejér)

i) Soit $f \in C_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \forall N \geq 1$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$

ii) Soit $f \in L^1$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p \forall N \geq 1$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Corollaire 27: Si $f, g \in C_{2\pi}$ alors $\chi(f) = \chi(g) \Leftrightarrow f = g$.

Corollaire 28: Soit $f \in C_{2\pi}$, C^+ par morceaux alors $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Application 29 (Théorème de Weierstrass) Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes algébriques.

Théorème 30 (Dirichlet) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π périodique, mesurable, int. équilibrée sur $[0, 2\pi]$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que :

i) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t) =: f^+$ et $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(x_0 + t) =: f^-$ existent.

ii) $\int_0^\delta |f(x_0 + t) - f^+| dt < +\infty$ et $\int_0^\delta |f(x_0 - t) - f^-| dt < +\infty$

Alors on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2} (f^+ + f^-)$

C Cas des fonctions de carré intégrable HEA 6.4 QZ 4.2.1 X.G. exo

Proposition 31: L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Proposition 32: $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de L^2 .

Théorème 33 (Inégalité de Bessel) Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a :

$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$

Théorème 34 (Formule de Parseval) Pour toute fonction $f, 2\pi$ périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ on a :

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

Application 35: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III Utilisation des coefficients et séries de Fourier

A Théorèmes de comparaison. QZ 4.5.2

Proposition 36: Si $f \in C_{2\pi}^k$ alors $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$.

Proposition 37: Si $k \geq 2$ et $c_n = O(|n|^{-k})$ alors $f \in C^{k-2}$.

Proposition 38: $f \in C_{2\pi}^\infty \Leftrightarrow \gamma(f) \in \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{N}, |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0\}$

Remarque 35: Ces dernières propositions montrent que l'application γ échange régularité contre décroissance vers 0 en $\pm$ infini.

B Résolution d'équations aux dérivées partielles. Les Isern

Proposition 40: Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ convergent et valent $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Développement (résolution de l'équation de la chaleur)

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et $d_n = C_n(\gamma)$ ses coefficients de Fourier.

Alors: $\exists! u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ telle que:

- i) $\forall t > 0, x \mapsto u(t, x)$ est 2π périodique.
- ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
- iv) $u(t, \cdot)$ converge en norme L^2 lorsque $t \rightarrow 0$

C Formule sommatoire de Poisson X.G

Développement Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^∞ vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{|x|^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{|x|})$. Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2i\pi m x} \text{ où } \forall m \in \mathbb{Z}, \hat{f}(m) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi m t} dt$$

Application 4.1: $\forall \Delta > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 \Delta} = \Delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\Delta}}$

Références :

Analyse pour l'agrégation Queffelec Zuilly QZ

Suites et séries numériques Suites et séries de fonctions El Annani HCA

Xavier Gourdon Analyse X.G

13-1 développements pour l'agrégation Leroux Las

L'oral à l'agrégation de mathématiques Irenmann Iren