243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

I Généralités

A Série entière et rayon de convergence. J'int 11.1.1

<u>Définition 1</u> (séries entières) :
Soit $a = (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série entière associée à a est la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$.
La somme de la série entière est la somme de la série $\sum u_n$, c'est à dire la $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

<u>Théorème 2</u> (Lemme d'Abel) : ($z_0 \neq 0$)
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

<u>Définition 3</u> (rayon de convergence) :
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
i) La borne sup de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$
ii) Le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $D_o(0, R)$.
dire que la série CV ssi $|z|<R$, DV si $|z|>R$ et pour $|z| = R$?? ($= \mathbb{C}$ si $R = +\infty$)
Exemple 4 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum \alpha^n z^n$ est $r = \frac{1}{|\alpha|}$
↳ et que si on trouve R avec ces propriétés, c'est le rayon de CV

<u>Théorème 5</u> (convergence normale)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $D_F(0,\rho)$, où $0 \leq \rho < R$.

Exemple 5 : • Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1, son domaine de définition est $D_o(0,1)$. La série diverge en tout point de la frontière.
• Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est 1, son domaine de définition est $D_F(0,1)$. La série converge en tout point de la frontière.

B Détermination du rayon de convergence. J'int 11.1.2
X-G 4.4

<u>Théorème 6</u> (comparaison) :
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement.
i) Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
ii) Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

<u>Théorème 7</u> (règles de d'Alembert, Cauchy, Cauchy-Hadamard)
i) Si $a_{n+1}/a_n \to \lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = 1/\lambda$
ii) Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to \lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = 1/\lambda$
) avec conventions...
iii) On a toujours $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{?} \frac{1}{R}$

Exemple 8 : le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.
Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1.

Remarque 9 : On peut montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda$ implique $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to \lambda$. La réciproque est fausse (par exemple la suite $u_n = 2+(-1)^n$ vérifie $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 1$ mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne converge pas.)

C Opérations sur les séries entières J'int 11.1.3

<u>proposition 10</u> (somme) :
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie alors :
$$R \geq \min\{R_a, R_b\}$$
De plus si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min\{R_a, R_b\}$.
Parler aussi de $\sum(\lambda a_n z^n)$
Exemple 11 : le rayon de convergence de la série entière $\sum ch(n) z^n$ est $\frac{1}{e}$.

<u>Définition 12</u> :
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série entière $\sum c_n z^n$ où :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
est le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

<u>Proposition 13</u> (Produit).
Soit $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. Alors :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min\{R_a, R_b\},\ \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i z^i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$
En particulier le rayon de convergence R du produit de Cauchy vérifie :
$$R \geq \min\{R_a, R_b\}.$$

⚠ On ne peut rien dire de plus sur R même si $R_a \neq R_b$

Exemple 14. $\underbrace{(1-z)}_{a_0=1,\ a_1=-1,\ a_i=0} \sum z^n = \underbrace{1}_{a_0=1,\ a_{k\geq1}=0}$ $(R_a, R_b, R_c) = (+\infty, 1, +\infty)$

II Régularité sur la somme

A Régularité sur le disque de convergence. J'ont 1.1-2

Théorème 15 : (C^∞)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors f est C^∞ sur $D_o(0,R)$ et on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

c'est même holomorphe. Due qu'on peut dériver terme à terme

Remarque 16 : f coïncide avec sa série de Taylor sur $D_o(0,R)$

Théorème 17 (primitivation terme à terme)
Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soit F une primitive de f sur $]-R,R[$. On a alors :
$\forall t \in]-R,R[\quad F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$

Exemple 18 : Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

B Convergence sur le cercle X. G C.C exos

$\boxed{\text{Développement}}$ **Théorème d'Abel**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$.
Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n$

Théorème taubérien faible
Soit $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$. Alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} a_n = S$.

Exemple 19 : on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

Contre exemple 20. $\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.

III Développements en série entière

A Fonctions développables en séries entières J'ont 1.1.3.1 X. G C.C exo

Définition 21 :
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$
i) Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que :
$\forall z \in D_o(0,r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$,
on dit que f est développable en série entière sur $D_o(0,r)$.
ii) On dit que f est développable en série entière s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D_o(0,r)$.

Exemple 22 : Toute fonction polynomiale est développable en série entière.
autres exemples ? → fonctions usuelles, inverse d'une série entière,

Théorème 23 : (Unicité du développement en série entière)
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
S'il existe un intervalle $J =]-r, r[$ avec $r > 0$ tel que :
$\forall x \in J \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$
alors les suites (a_n) et (b_n) sont égales.

parler des zéros isolés

Exemple 24 : si le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif et s'il existe $r > 0$ tel que :
$\forall t \in]-r,r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$
alors la suite (a_n) est nulle.

Théorème 25 : (Formule de Cauchy)
Pour tout $r \in]0,R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$
conséquence également de l'holomorphie

B L'exponentielle J'ont 1.1.3.2

Définition 26 : (exponentielle)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Définition 27 : (fonctions trigonométriques)
On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cos et sin par :
$\cos x = \mathrm{Re}(\exp(ix))$ et $\sin x = \mathrm{Im}(\exp(ix))$
on peut le faire sur $\mathbb{C}$ -

Proposition 28 : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

Proposition 29. Soit $z \in \mathbb{C}$ on a :
$\exp(z) \neq 0$, $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, $|\exp(z)| = e^{Re(z)}$

Proposition 30 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Corollaire 31 : (Formule de Moivre et d'Euler)
i) Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$.
ii) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

C Equations différentielles. QZ 10.6.3 J'int 11.4

Il est souvent judicieux de rechercher des solutions particulières d'équations différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

Théorème 32 :
Soient $p(x) = \sum p_n x^n$ et $q(x) = \sum q_n x^n$ convergeant pour $x \in]-R,R[$ où $R > 0$. Alors pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution y sur $]-R,R[$ de $y'' + py' + qy = 0$ avec $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière.

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\alpha \arcsin t)$ est développable en série entière.

Références :

J'intègre MP-MP* J'int

Xavier Gourdon Analyse X. G

Queffélec Zuily Eléments d'analyse QZ.