241 : Suites et séries de fonctions. Exemple et contre exemples.

I Convergences

On considère (f_n) une suite de fonction et f une fonction, toutes définies sur un même ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A Suites de fonctions   XG 4.3.1 + exos   J'int 10.2.

Définition 1 : (convergence simple, uniforme)
On dit que (f_n) converge simplement vers f sur E si pour tout $x \in E$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur E si $\sup_E |f - f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Remarque 2 : La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse. Considérer $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$.
f_n cvs vers f pas cont.

Proposition 3 (critère de Cauchy uniforme).
Il existe une fonction g telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$ si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \forall x \in E, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$.

Théorème 4 : Si $f_n \xrightarrow{u} f$ au voisinage de $a \in E$ et si les f_n sont continues en a alors f est continue en a. ← contre-exemple si CV simple ?
cf rem 2

Théorème 5 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose les (f_n) dans $C^1(I,\mathbb{R})$ telles que $f_n' \xrightarrow{u} g$ et $f_n \xrightarrow{u} f$. Alors $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow{u} f$ et $f' = g$.
Rajouter le corollaire et éventuellement un exemple.

Contre exemple 6 : Une limite uniforme d'une suite de fonctions de classe C^1 n'est pas en général de classe C^1. Par exemple $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} \xrightarrow{u} \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 7 : (Dini)
Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur I alors la convergence est uniforme.

Remarque 8 : Le théorème 7 est une réciproque partielle du théorème 4.

Théorème 9 (double limite).
Si $f_n \xrightarrow{u} f$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite finie en $a \in \overline{A} \cup \{\pm\infty\}$ alors (l_n) converge. La fonction f a une limite en a et l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Contre exemple 10 : Il n'y a pas de version "convergence uniforme au voisinage de tout point" de ce théorème. Par exemple pour $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$ on a
$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

B Séries de fonctions.   J'int 10.4.   X.G 4.3   Ajouter thm dérivation

Définition 11 : (Série de fonction, convergence simple, convergence uniforme)
On appelle série de terme général f_n la suite (S_n) définie par $\sum_{k=0}^{n} f_k = S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle S_n la somme partielle d'indice n.
On dit que la série converge simplement vers S lorsque $S_n \xrightarrow{s} S$.
On dit que la série converge uniformément vers S lorsque $S_n \xrightarrow{u} S$.

Exemple 12 : $\sum x e^{-nx} \xrightarrow{s} \frac{x}{1-e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ (ne converge pas uniformément).

Propriété 13 : Soit $\sum f_n$ simplement convergente. Alors $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $R_n = S - S_n \xrightarrow{u} 0$.
il manque les x

Propriété 14 : (critère de Cauchy uniforme)
$\sum f_n$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p \geq n \geq N, \left|\sum_{k=n}^{p} f_k\right| \leq \varepsilon$.
à définir

Définition 15 : (convergence normale)
On dit que $\sum f_n$ converge normalement quand $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 16 : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque 17 : La convergence normale implique la convergence uniforme. La réciproque est fausse. Considérer la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0,1]$.
$CV\,N \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} CV\,u \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} CV\,s$ contre exemples de le Gourdon.

C Convergence en théorie de l'intégration.   BP 8.1   J'int 13

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un e.m

Théorème 18 (convergence monotone)
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives croissante sur E. Alors $\lim \int_E f_n = \int_E f$.

Lemme 19 (Fatou) Soit (f_n) mesurable positives alors :
$0 \leq \int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$.

Théorème 20 (convergence dominée) :
Soit (f_n) une suite d'éléments de $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ vérifiant :
i) $f_n(x) \to f(x)$ μ p.p.
ii) il existe $g \in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp
Alors $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\lim \int_E f_n = \int_E f$ (et même $\lim \int_E |f_n - f| = 0$)

Remarque 21 : l'hypothèse de domination est cruciale. Considérer $f_n(t) = n^2 \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}[}$

Théorème 22 :
Soit (φ_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.
i) Si les (φ_n) sont positives $\forall n \geq 1$ alors $\int_E \sum \varphi_n \, d\mu = \sum \int \varphi_n \, d\mu$.
ii) Si $\sum \int_E |\varphi_n| \, d\mu < \infty$ alors les fonctions φ_n, $\sum |\varphi_n|$ et la fonction définie μ pp $\sum \varphi_n$ sont μ-intégrables et : $\int_E \sum \varphi_n \, d\mu = \sum \int_E \varphi_n \, d\mu$

Exemple 23 : $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

II Séries entières   X.G 4.4

Définition 24 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Exemple 25 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est la série entière de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$.

Proposition 26 (Lemme d'Abel)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :
i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
ii) pour tout r, $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\overline{D(0,r)}$.

Définition 27 (rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$ s'appelle rayon de convergence. $\in [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$

Proposition 28. D'après le lemme d'Abel :
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge
- pour tout $r \in [0,R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B(0,r)}$

Exemple 29 : On ne peut a priori rien dire sur le cercle de convergence. Par exemple $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ sont de rayon 1 or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 30 : (Règle de d'Alembert)
Si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ (avec par convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Proposition 31 (Règle de Cauchy)
Si $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda \in [0,+\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$

Exemple 32 : $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^{\alpha} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
$\sum n! \, z^n$ a un rayon de convergence nul.

Remarque 33 : Ces règles ne s'appliquent pas toujours (penser aux suites lacunaires). Si la règle d'Alembert s'applique alors la règle de Cauchy s'applique. La réciproque est fausse. Penser à $a_n = 2^{n+(-1)^n}$.
Dans tous les cas on montre que $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ (règle de Hadamard)

Théorème 34 : l'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$

Théorème 35 La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est C^{∞} sur $]-R,R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R,R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre : $\forall p \in \mathbb{N}$ $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$.

Conséquence : La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $]-R,R[$.

fonctions développables en série entière

Développement (Théorème d'Abel) Application et contre exemple
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ [Voir Annexe]

III Séries de Fourier X. G 4.5 ER A 6.3

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_m = e^{im\cdot}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ et $\|f\|_1 = \sqrt{\langle f|f\rangle}$

Réf ?

Définition 36 : (coefficient de Fourier)
Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}dt = \langle f|e_m\rangle$ le $m$ième coefficient de Fourier de f où $m \in \mathbb{Z}$.

Exemple 37 :
Pour $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ 2π périodique sur $[-\pi, \pi]$ on a $c_m(f) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } m = 0 \\ \frac{2(-1)^n}{\pi^2 m^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 38 : Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ on a :
i) $c_m(\overline{f}) = \overline{c_{-m}(f)}$
ii) $c_m(f(t+a)) = e^{ima} c_m f(t)$.
iii) $f * e_m = c_m(f)\, e_m$
iv) Si $f \in C(\mathbb{T}) \cap C^1_{pm}(\mathbb{T})$ alors $c_m(f') = im\, c_m(f)$.
sens

Lemme 39 (Riemann - Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $c_m(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Définition 40 (Somme partielle de Fourier)
On appelle somme partielle de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité
$S_N(f) = \sum_{m=-N}^{N} c_m(f)\, e_m$.

Définition 41 (Noyau de Dirichlet)
On appelle noyau de Dirichlet d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $D_N = \sum_{m=-N}^{N} e_m$

Proposition 42 :
i) $S_N(f) = f * D_N$
ii) D_N est pair et $\|D_N\|_1 = 1$
iii) $\forall x \in \mathbb{T}$, $D_n(x) = \dfrac{\sin((m+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$

Théorème 43 : (Dirichlet)
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet en un point x_0 une limite à droite et une limite à gauche et si $h \mapsto \frac{1}{h}[f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0)^+ - f(x_0)^-]$ est bornée au voisinage de 0 alors, $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}(f(x_0)^+ + f(x_0)^-)$

Théorème 44 : (Parseval)
$(e_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_m(f)|^2.$$

Application 45 : $\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Développement (Equation de la chaleur)
Soit $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$ et $(d_m = c_m(u_0))_{m\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.
Alors, il existe une unique $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
i) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t, \cdot)$ est 2π-périodique.
ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
iv) $u(t, \cdot) \xrightarrow[t\to 0]{\|\cdot\|_2} u_0$.

il manque les théorèmes sur la dérivation (avant les séries entières)

Références :

X. G Maths en tête analyse

Objectif Agrégation BMP

J'intègre MP - MP*

Théorie de l'intégration Briane Pagès

Annexe :

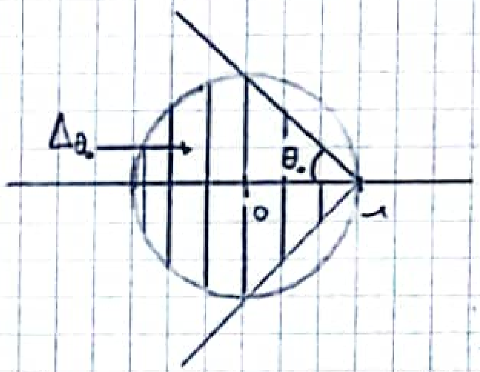

Figure 1. La région Δ_{θ_0}. L'écartement du secteur angulaire est $2\theta_0$