239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, (E, d) un espace métrique.

I Régularité des intégrales à paramètres

A Continuité J'int 13 BP 8.3

Théorème 1 : (convergence dominée)
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ telle que :
i) $\lim f_n(x) = f(x)$ μ pp.
ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp.
Alors f est intégrable et $\lim \int_X f_n = \int f$ (et même $\lim \int |f_n - f| = 0$).

Remarque 2 : L'hypothèse de domination est cruciale. Considérer la fonction $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ $t \mapsto n^2 t^{n-1}$.

Théorème 3 : (continuité sous le signe intégrale)
Soit $f : X \times E \to \mathbb{K}$ une application telle que :
i) pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable.
ii) pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue.
iii) il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $t \in E$, pour tout $x \in X$ $|f(x,t)| \leq g(x)$
Alors l'application F définie sur E par $F(t) = \int_X f(x,t)\,dx$ est continue.

Exemple 4 : La fonction $g : x \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Application 5 : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
ex : la transformée de Fourier est continue sur $\mathbb{R}$.

B Dérivabilité J'int 13 BP 8.3

Théorème 6 : (dérivation sous le signe intégrale)
On suppose ici que $E = I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \times I \to \mathbb{K}$ telle que
i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable et intégrable (sur X).
ii) pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable.
iii) $\exists g \in L^1(\mu) : \forall t \in I \ |\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$ μ pp.
Alors F est définie, dérivable sur I et $F' : t \mapsto \int_X \partial_t f(x,t)\,dx$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (Intégrale de Dirichlet) En prenant $f : (t,x) \mapsto \frac{\sin x}{x} e^{-tx}$ on montre que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Corollaire 7 : (Dérivation multiple sous le signe intégrale)
Soit $f : X \times I \to \mathbb{K}$ telle que : (on suppose $k \in \mathbb{N}^*$)
i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur X.
ii) pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est C^k sur I.
iii) pour $1 \leq i \leq k$, il existe $g_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $t \in I$, $\left|\frac{\partial^i f}{\partial t^i}(x,t)\right| \leq g_i(x)$ μ pp.
Alors F est C^k sur I et $F^{(i)} : t \mapsto \int_X \partial^i_t f(x,t)\,dx$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Application 8 : La fonction Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 9 : Une série entière est C^∞ sur son disque de convergence.
ex : la transformée de Fourier est C^1 et $\hat{f}'(y) = -i\widehat{yf}$

C Holomorphie BHP 2.4.4

Théorème 10 : (holomorphie sous le signe intégrale)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :
i) pour tout $z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable.
ii) il existe $N \subset X$ de mesure nulle tel que pour tout $x \notin N$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe.
iii) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall x \notin N$ $\forall z \in K$.
Alors F est holomorphe sur Ω et pour tout $z \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$, $F^{(m)}(z) = \int_X \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z,x)\,d\mu(x)$.

Exemple 11 : Γ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Application 12 : Γ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ qui ne s'annule pas et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière.
App : polynômes orthogonaux.

II Produit de convolution

A Définitions et propriétés BP 14.2

Définition 13 : (convolution)
Soit $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ boréliennes. La convolée de f et g, notée $f * g$, est définie par :
$$\forall x, \mathbb{R}^d \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

Théorème 14 :
i) Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f * g$ existe μ pp et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
ii) Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ telque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $f*g$ existe ppet $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Exemple 15 :
i) $f*0=0$
ii) $f*1 = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$
iii) $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(x) = [\min(x,1) - \max(x-1,0)] 1_{[0,2]}(x)$. X

Proposition 16 : La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R}^d)$
Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre de Banach (cependant sans unité).

Contre exemple 17 : Si $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ $g = 1_{[-1,0]} - 1_{[0,1]}$ et $h = 1$ alors
$(f*g)*h = 1$ et $f*(g*h) = 0$.

B Approximation de l'unité et suite régularisante. BP 14.4 14.5

Définition 18 : Une suite $(\alpha_n) \in L^1(\mu)^{\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité si :
i) pour tout $n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, dx = 1$
ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| dx < +\infty$
iii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_n \int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n| \, dx = 0$

Exemple 19 : pour $\alpha \in L^1(\mu)$ telque $\int_{\mathbb{R}} \alpha \, d\mu = 1$, la suite $(\alpha_n : \overset{\mathbb{R}}{x} \mapsto \overset{\mathbb{R}}{n\alpha(nx)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 20 : Soit (α_n) une suite d'approximations de l'unité. Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors :
$\forall n \geq 1$, $f * \alpha_n \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Exemple 21 :
i) Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\alpha_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}}$
ii) Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\alpha_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2+x^2)}$
iii) Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\alpha_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\, n)^d} e^{-\frac{|x|^2}{2n^2}}$?

Définition 22 : Une suite (α_n) est dite régularisante si :
i) la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité ?
ii) pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$.

Exemple 23 : Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on définit $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu}$ et la suite des $(\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx))$ est régularisante.

Théorème 24 : pour tout $p \in [1, \infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est $\|\cdot\|_p$ dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. ?

III Transformée de Fourier. Li 3, El A.

Définition 25 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par :
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x | t \rangle} dx$$

Proposition 26 : La transformée de Fourier est une application linéaire et $\hat{f}$ est uniformément continue et bornée.

Théorème 27 (Riemann - Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) = \{ g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) / \lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0 \}$.

Proposition 28 : Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
i) pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ $\hat{f}(-t) = \overline{\hat{f}(t)}$
ii) $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Application / Développement La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. On a pour $a \in \mathbb{R}^*_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{t^2}{4a}\right)$$
quelle norme ?

Proposition 28 : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective et continue.

Définition 29 : (Espace de Schwartz)
On pose $S(\mathbb{R}^d) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^d \ \forall m \in \mathbb{N}, \frac{\partial^{n_1+\dots+n_d}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_d^{n_d}}(t) = O\left(\frac{1}{|t|^m}\right) \}$
l'ensemble des fonctions régulières à décroissance rapide.

Proposition 30 : Si $f \in S(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^d)$

Théorème 31 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si
$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$ alors $f = g$ presque partout.

Application 32 (résolution d'edp)
Soit $u_0 \in L^2([0,2\pi])$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = c_k(u_0)$ ses coefficients de Fourier. Alors il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞ telle que
1) $\forall t > 0$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π périodique
2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont biens définis et continues sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$.
3) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
4) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0]{\|\cdot\|_2} u_0$.

Version transformée de Fourier :
On considère l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_x^2 u$ avec condition initiale $f \in S(\mathbb{R}^d)$
Alors il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que $u(t,\cdot) \in S(\mathbb{R}^d)$ converge uniformément sur tout compact et $u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0]{} f$ dans L^1. Cette solution est donnée par :
$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = f * k_t(x)$ où $k_t = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

Proposition 44 : Si f et $g \in S(\mathbb{R}^d)$ alors :
$$\int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g$$

Théorème 45 : (Fourier Plancherel)
$\mathcal{F}$ se prolonge en un unique opérateur linéaire (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui même vérifiant :
- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d (-id)$
- pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2}^2$
- pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \bar{g}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \bar{\hat{g}}(x) dx$

On peut faire :

III Transformation de Fourier
A Sur $L^1(\mathbb{R})$.

B Prolongement de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$

C Espace de Schwartz.

Références :

Théorie de l'intégration Briane - Pagès

(Analyse réelle et complexe Rudin)

Objectif Agrégation Beck Malick Peyré.

Cours d'analyse fonctionnelle Daniel Li

Série de Fourier El Amrani.