236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables.

I Méthodes de calcul directes

A Calculs de primitives X.G 3.2

Théorème 1 : Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Exemple 2 : Pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}$, pour $\beta > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} = \frac{1}{\beta - 1}$

Théorème 3 : (Décomposition en éléments simples)
Soit $f \in \mathbb{K}(X)$, $f \neq 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $f = \frac{N}{D}$ avec N et $D \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et D unitaire. Soit $D = D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m}$ la décomposition de D en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = E + \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{D_i^j} \right)$ avec $E \in \mathbb{K}[X]$, $A_{ij} \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(A_{ij}) < \deg(D_i)$.

Application 4 : Pour calculer une intégrale d'une fonction rationnelle réelle, on la décompose en éléments simples.

Exemple 5 : En décomposant en éléments simples $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}$, on obtient que $x \mapsto -\ln|x+1| + \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$. sur ...

B Intégration par parties. X.G 3.1 J'int 12.4.1

Théorème 6 (intégration par parties) :
Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1. Alors :
$$\int_a^b u(x) v'(x) = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,dx$$

Application 7 : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi convergente.

Exemple 8 : (Intégrales de Wallis)
Posons $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Exemple 9 : Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$. On en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

C Changement de variables X.G 3.1 / 5.4.3 J'int 12.4.2

Théorème 10 (changement de variable en dimension 1) :
Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ une application continue telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Conséquences :
- Soit $f : [-a,a] \to E$ une application continue. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$. Si f est impaire $\int_{-a}^a f = 0$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application continue et T périodique. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

Exemple 11 : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0$ via le changement de variables $t = \frac{1}{u}$. th. 10 sur $[a,b]$

Théorème 12 (changement de variable en dimension quelconque)
Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ un C^1 difféomorphisme de U sur V dont la jacobien $J(\varphi)$ est borné sur U. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable et pour toute fonction continue et bornée $f : V \to \mathbb{R}$, on a $\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J(\varphi)(u)|\,du$ où $J(\varphi)(u) = \det(d\varphi_u)$

Application 13 (passage en coordonnées polaires)
Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les hypothèses du théorème 12 on a :
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$
coord. polaires pas C^1-difféo

application
Exemple 14 : Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

II Méthodes de calcul indirectes

A Interversion d'intégrales BP 1.1.3

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés. On suppose que μ et ν sont σ finis.

Théorème 15 : (Fubini-Tonelli) : Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable. Alors $x \mapsto \int_F f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables et on a :
$$\int_{E \times F} f(x,y)\,d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Exemple 16 : Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x+y\leq 1\}$, alors $\int_D xy\,dx\,dy = \frac{1}{24}$.

Théorème 17 : (Fubini Lebesgue)
Soit $f:(E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \mathbb{K}$ intégrable. Alors
- $x\mapsto \int_F f(x,y)\,d\nu(y)$ est définie μ pp et est intégrable sur E,
- $y\mapsto \int_E f(x,y)\,d\mu(x)$ est définie ν pp et est intégrable sur F,
- $\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E\int_F f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \iint_{FE} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$.

Contre exemple 18 : On considère $f: \begin{array}{l}[0,\infty[\times[0,1] \to \mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto 2e^{-2xy}-e^{-xy}\end{array}$
L'application est continue mais $\int_0^1\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = 0 < \int_0^\infty\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$.

Application 19 : Calcul du volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

B Interversion limite intégrale BP 8.3 J'int 13.2

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Théorème 20 (convergence dominée)
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telles que :
- $\lim f_n$ existe μ pp
- il existe g intégrable sur E telle que $|f_n(x)|\leq g(x)$ pp pour tout $n\geq 0$.

Alors f est intégrable et $\lim \int_E |f_n - f|\,d\mu = 0$ (et donc $\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu$)

Exemple 21 : L'hypothèse de domination est cruciale. Considérer
$f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ $t\mapsto n^2 t^{n-1}$.

Application 22 : Lorsque l'on peut écrire f comme série de fonctions, on peut souvent appliquer le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple 23. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$

Théorème 24 (Dérivation sous le signe intégrale) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\times E \to \mathbb{K}$ telle que :
- pour tout $u\in I$, $x\mapsto f(u,x)$ est intégrable sur E.
- pour μ presque tout x, $u\mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I.
- il existe g intégrable telle que pour tout $u\in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right|\leq g(x)$ μ pp.

Alors $F : u\mapsto \int_E f(u,x)\,d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : u\mapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$

$\boxed{\text{Développement}}$ (intégrale de Dirichlet) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

C Analyse complexe Tau 6.5 8.4

? si $F\in H(\Omega)$, $F'\in H(\Omega)$

Théorème 25 (Cauchy) : Soit $F\in H(\Omega)$ et F' une fonction continue dans Ω. Alors pour tout chemin fermé γ dans Ω : $\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$.

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{\lambda^2}{4a}\right)$$

En particulier, la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.

Théorème 26 (Théorème des résidus)
Soit f une fonction holomorphe sur $V=U\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ où $U\subset\mathbb{C}$ est un ouvert et les a_i sont les pôles de f. Soit γ un chemin continu fermé dans V tel que $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$ pour tout $z\notin U$. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ind}(\gamma,a_k)\,\mathrm{res}(f,a_k)$$

Trouver 1 ex d'application direct.

Application 27 : Pour $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.
Lo ca reprend l'exemple de la gaussienne

Application 28 : On retrouve que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

III Méthodes d'approximation numérique

A Méthodes de quadrature. Dem 3.1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$. Fixons $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $h_i := x_{i+1}-x_i$

Définition 29 : (Méthode de quadrature)
Une méthode de quadrature consiste, pour $0 \leq i \leq m-1$ à approcher $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ par $A_i(f) = h_i \sum_{j=0}^{l_i} w_{ij} f(\xi_{ij})$ où $\xi_{ij} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, et $\sum_{j=0}^{l_i} w_{ij} = 1$ où $w_{ij} \in \mathbb{R}$ fixé.

On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{0}^{m-1} A_i(f)$ l'erreur de la méthode.

Définition 30 : On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si la formule approchée est exacte ($E(f)=0$) pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et inexacte pour au moins un $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$.

Application 31 :
i) Méthode des rectangles
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$ (méthode des rectangles à gauche)
ou par $\sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$ (méthode des rectangles à droite).
Ces méthodes sont d'ordre 0.

ii) Méthode des points milieux.
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})$. Méthode d'ordre 1.

iii) Méthode des trapèzes
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{k-1} h_i \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}$. Méthode d'ordre 1.

Méthode de Simpson ? à faire...

B Méthode de Monte-Carlo. exo 10.8 proba tome 2 de Jean Yves Ouvrard

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Théorème 32 : (Loi des grands nombres)
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d intégrables. Alors :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i \xrightarrow[m \to +\infty]{} E[X_1] \quad \text{presque sûrement.}$$

Application 33 : (Méthode de Monte-Carlo)
Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $(X_i)_{\mathbb{N}^*}$ une suite de va iid de loi $\mathcal{U}([0,1]^d)$. Alors $I_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[m \to +\infty]{p.s} I = \int_{[0,1]^d} f(x)\,dx$.

Remarque 34 : Cette méthode est moins efficace que les méthodes de quadrature en dimension 1 mais son efficacité ne dépend pas de la dimension de l'espace (elle est en $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$). Elle est donc largement préférable en grande dimension.

à définir ?

estimation des erreurs ?

Références :

J'intègre MP-MP*

X.G Maths en tête Analyse + Algèbre

Analyse complexe Rudin

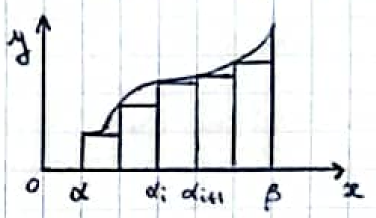
Analyse numérique Demailly

Objectif agrégation Beck, Malick, Peyré.

Théorie de l'intégration Briane Pagès.

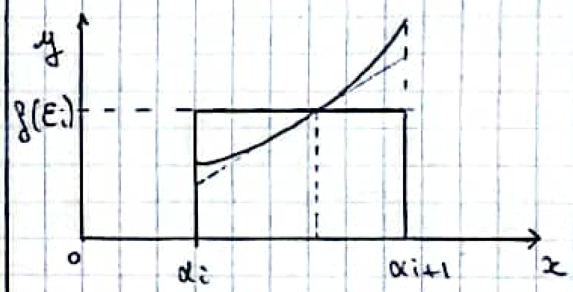
Annexe :

• méthode des rectangles à gauche :



• méthode des rectangles à droite :

• méthode du point milieu :



où $\xi_i = \dfrac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$

Remarque : si f est une fonction affine la formule approchée est en fait exacte.

• méthode des trapèzes