235 Problèmes d'interversion en analyse

On considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions et f une fonction, toutes définies sur un même ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
↳ espace métrique

I Suites et séries de fonctions

A Rappels et convergence normale. X.G 4.3

Définition 1 : (convergence simple, uniforme)
On dit que (f_n) converge simplement sur X un ensemble vers f si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
On dit que (f_n) converge uniformément sur X vers f si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2 : La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse exemples ! $f_n : [0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$.

Théorème 3 : (Critère de Cauchy) : (f_n) converge vers f uniformément si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

Définition 4 :
On dit que la série converge simplement lorsque la suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k)_n$ converge simplement.
On dit de même que la série converge uniformément lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.
On dit que la série converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. ?

Remarque 5 : convergence normale $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergence uniforme $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergence simple

B Interversion limite - limite J'int 10.2.3 10.2.2 10.3.2 exemples — voir exo X.G

?

Théorème 6 (de la double limite)
Si (f_n) converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite finie en $a \in \bar{A}$ ou $a = \pm\infty$ alors la suite (ℓ_n) converge, f a une limite en a et on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Exemple 7 : Il n'y a pas de version "convergence uniforme au voisinage de tout point" de ce théorème

Par exemple pour $f_n : x \in [0,1[\mapsto x^n$, $\lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1^-} f_n(x)$

Théorème 8 : Si (f_n) converge uniformément au voisinage de a vers f et si les f_n sont continues en $a \in A$, alors f est continue en a.

Corollaire 9 : Si $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de $a \in \bar{A}$ et si pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a, alors $\sum \ell_n$ converge et :
$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$$

Exemple 10 : $\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = 0$, $\lim_{x \to 0^+} \sum \frac{x}{x + n^2} = 1$

Application 11 : Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur $D(0,R)$.

Remarque 12 : On ne peut rien dire sur le cercle de convergence. Par exemple avec $\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$ définie pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1+z} \to \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge

Proposition 13 : Supposons que les fonctions f_n soient de classe C^1. Si la suite (f_n) converge simplement vers f et si la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment de I alors : f est C^1, $f' = \lim f_n'$ et $f_n \xrightarrow{u} f$ sur tout segment de $I \subseteq \mathbb{R}$

Attention : Une limite uniforme d'une suite de fonctions de classe C^1 n'est pas en général C^1. Par exemple : $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}} \xrightarrow{u} f(x) = \sqrt{x}$ qui n'est pas C^1.

Corollaire 14 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons les f_n de classe C^p. Si :
- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement,
- la suite $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la limite simple f de la suite (f_n) est de classe C^p et pour tout $k \in [\![0,p]\!]$:
$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim f_n^{(k)}(x)$$
exemple ? → fonction ζ de Riemann

C Interversion limite - intégrale sur un segment. J'int 10.3.1 10.3.3

Théorème 15 : On suppose que $I = [a,b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors :
$$\int_{[a,b]} f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{[a,b]} f$$
notation --

Remarque 16 : L'hypothèse de convergence uniforme est cruciale. Par exemple :

Considérer $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$ sur $[0,1]$, $f_n(x) \to 0$ et $\int_{[0,1]} f_n \to +\infty$.

Corollaire 17 : Supposons que les fonctions f_n soient continues sur le segment $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors :

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n$$

Exemple 18 : $\int_{[0,2\pi]} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(kx) dx = 0$ avec (a_n) suite ≥ 0 telle que $\sum a_n$ converge.

Application 19 : Si $f(x) = \sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R>0$ alors pour $[a,b] \subset]-R,R[$ on a $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n\geq 0} a_n \int_a^b x^n dx$. $= \dots$

II Théorèmes d'interversion en théorie de l'intégration.

Dans toute la suite $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

A Les théorèmes fondamentaux BP 8.1 8.2 J'int ~~3~~ (pour exemples)

Théorème 20 : (convergence monotone) p133 BP
ensemble des fct mesurables positive finies ou non définies sur $(E, \mathcal{A})$

Soit (f_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ qui converge simplement vers f. Alors $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$.

Remarque 21 : c'est faux si les fonctions sont décroissantes. Par exemple $f_n = \frac{1}{n}$, $f_n = 1_{[n,\infty[}$

Corollaire 22 : Soit (f_n) des fonctions mesurables positive μ-p.p. Alors :

$$\int_E \sum_{n\geq 0} f_n d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_E f_n d\mu$$

Théorème 23 (lemme de Fatou) :
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positive μ pp, alors

$$0 \leq \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq +\infty$$

Application 24 : Si (f_n) une suite de fonction positive vérifie $\lim f_n = +\infty$ alors $\int_E f_n d\mu \to +\infty$.

Théorème 25 (convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telles que :
- $\lim f_n$ existe μ pp
- il existe g intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp pour tout $n \geq 0$.

Alors f est intégrable et $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ (et même $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$)

Remarque 26 : L'hypothèse de domination est cruciale. Considérer $f_n = n 1_{[0,\frac{1}{n}]}$.

Corollaire 27 : Si les (f_n) sont mesurables et telles que $\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$ alors les (f_n) et $\sum f_n$ sont intégrables et on a : $\sum_{n\geq 0} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n\geq 0} f_n d\mu$.

Application 28 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}$ A vérifier

Développement : Equation de la chaleur périodique

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle, 2π périodique, C^1 par morceaux et continue. Alors il existe une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x) & \forall t>0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

B Conséquences sur les intégrales à paramètres BP + BHP 2.4.4 8.3

Théorème 29 : (continuité sous le signe intégrale)
Soit U un espace métrique, $u_0 \in U$ et $f : U \times E \to \mathbb{K}$ telles que :
- pour tout $u \in U$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable
- pour μ presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0.
- il existe g intégrable telle que $\forall u \in U$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ-pp.

Alors $F : u \mapsto \int_E f(u,x) d\mu(x)$ est définie sur U et continue en u_0.

Application 30 : continuité de la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$

Théorème 31 : (dérivation sous le signe intégrale)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \to \mathbb{K}$ telle que :
- pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable sur E
- pour μ presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I.
- il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$ $|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq g(x)$ μ-p.p

Alors $F : u \mapsto \int_E f(u,x) d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : u \mapsto \int_E \frac{\partial f(u,x)}{\partial u} d\mu(x)$

$\boxed{\text{Développement}}$ en prenant $f:(t,x)\mapsto e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$, on montre que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Application 32. La transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne. Si $G_\sigma : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour $\sigma>0$, $\hat{G}_\sigma : x\mapsto e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}}$

$\to$ El Amrani Série de Fourier p 156

Théorème 33 : (Holomorphie sous le signe intégrale)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\times E\to\mathbb{C}$ tels que :
- pour tout $z\in\Omega$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable sur E.
- pour μ presque tout x, $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω
- il existe g intégrable telle que pour tout $z\in\Omega$, $|f(z,x)|\leq g(x)$ μ pp

Alors $F: z\mapsto \int_E f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et

$$\forall k\geq 0 \quad F^{(k)}: z\mapsto \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)\,d\mu(x).$$

Application 34 : La fonction $\Gamma: z\mapsto \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ est définie et holomorphe sur $\{Re(z)>0\}$.

C Interversion intégrale-intégrale. BP 11.3

Soit $(F,\mathcal{B},\nu)$ un autre espace mesuré. On suppose que μ et ν sont σ finis.

Théorème 35 : (Théorème de Fubini-Tonelli)
Soit $f:(E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\to\overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors $x\mapsto \int_F f(x,y)d\nu(y)$ et $y\mapsto\int_E f(x,y)d\mu(x)$ sont mesurables et on a :

$$\int_{E\times F} f\,d\mu\otimes\nu = \int_E\left(\int_F f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_F\left(\int_E f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Exemples - application ? calculs de volumes ?

Théorème 36 : (Fubini Lebesgue)
Soit $f:(E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\to\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrable, alors :
- $x\mapsto\int_F f(x,y)$ est définie μ-pp et est intégrable sur E.
- $y\mapsto\int_E f(x,y)$ est définie ν pp et est intégrable sur F.
- $\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E\int_F f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_F\int_E f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

Contre exemple 37 : Considérons $f:\mathbb{R}_+\times[0,1]\to\mathbb{R}$ $(x,y)\mapsto 2e^{-2xy}-e^{-xy}$.
Elle est continue mais $\int_0^1\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = 0 < \int_0^\infty\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$.

Références

Maths en tête Analyse X. G

J'intègre MP-MP* J'int

Théorie de l'intégration Briane-Pagès. BP

Objectif Agrégation Beck BMP