230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u = (u_n)$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

I Généralités

A Définitions et propriétés X.G 4.2.1

exemples

Définition 1 : (Série, reste, convergence)

- On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On note $\sum u_k$ la série de suite que $(\sum u_k)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On note $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste de la série à l'ordre n.
- On dit que $\sum u_k$ converge lorsque (S_n) converge. Dans ce cas sa limite est appelée somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$
- Une série non convergente est dite divergente.

Exemple 2 : (séries arithmétiques et géométriques)

i) Si $u_n = na$, $\sum u_n$ converge $\iff a = 0$.

ii) Si $u_n = b^n$, $\sum u_n$ converge $\iff |b| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} b^n = \frac{1}{1-b}$

B Critère de Cauchy et convergence absolue. X.G 4.2.1

Proposition 3 : (critère de Cauchy)

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n}^{p+n} u_k\right| \leq \varepsilon$.

Remarque 4 : $\sum u_k$ converge $\iff R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum u_k$ converge $\Rightarrow |u_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

⚠ La réciproque est fausse, considérer $\sum u_k$ où $u_k = \frac{1}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 5 : (convergence absolue).

Si la série $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente et dans ce cas la série $\sum u_n$ est convergente.

démonstration plus loin

⚠ La réciproque est fausse, considérer $\sum u_k$ où $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

II Séries à termes positifs

A Règles de comparaisons X.G 4.2.2. + exos

Remarque 6. Les théorèmes de comparaisons montrent qu'il est souvent utile de trouver des équivalents télescopiques du terme général pour connaître le développement de la série.

Théorème 7 : Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.

Théorème 8 : (règles de comparaison) énoncer d'abord le résultat avec $0 \leq u_n \leq v_n \; \forall n$

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

i) Si $v_n = O(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

ii) Si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

exemples - - - $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ dv.

Contre-exemple 9 : Avec $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^n}$ et $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature mais $u_n \not\sim v_n$.

$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ incompréhensible - répétitif

Théorème 10 : (règles d'équivalences)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors :

i) Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \quad , n \to +\infty$$

ii) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \quad , n \to +\infty$$

$\boxed{\text{Développement}}$ Étude de la vitesse de convergence du sinus itéré.

Application → série harmonique.

B Comparaison série-intégrale X.G 4.2.2

et continue

Proposition 11 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors la suite (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

Corollaire 12 : (série de Riemann)

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

à faire bien avant.

Corollaire 13 : (série de Bertrand)

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}$ converge si et seulement si $((\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1))$

C Critères de convergence X.G 4.2.3

Théorème 14 : Règle de Raab-Duhamel, d'Alembert, Cauchy
Supposons (u_n) à termes strictement positifs.
i) Si $u_{n+1}/u_n = 1/(1+a/n + O(1/n^2))$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^a$.
ii) Si $u_{n+1}/u_n \to \lambda \geq 0$, alors : ou $+\infty$
- $\lambda < 1 \Rightarrow \sum u_k$ converge
- $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_k$ diverge
- $\lambda = 1^+ \Rightarrow \sum u_n$ diverge

iii) Si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to \lambda \geq 0$ alors : ou $+\infty$
- $\lambda < 1 \Rightarrow \sum u_k$ converge
- $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_k$ diverge
- $\lambda = 1^+ \Rightarrow \sum u_k$ diverge

Exemple 15 : Etude des séries de termes général $\frac{1}{n!}$ et $\frac{1}{\lambda^n + 1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 16 : Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda$, alors $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to \lambda$. La réciproque est fausse (par exemple la suite $u_n = 2+(-1)^n$ vérifie $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 1$ mais u_{n+1}/u_n ne converge pas).

III Séries à termes quelconques

A Séries semi convergentes X.G 4.2.4

Définition 16 : On dit que $\sum u_k$ est semi convergente si $\sum u_k$ est convergente et non absolument convergente.

Définition 17 (séries alternées) :
On dit que $\sum u_k$ est alternée si $u_n u_{n+1} \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 18 : (critère des séries alternées)
Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et on a pour $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple 19 : La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est semi convergente.

B Transformation d'Abel X.G 4.2.6

Définition 20 : Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \alpha_n v_n$. Pour tout n on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Effectuer une transformation d'Abel sur la série $\sum u_n$ c'est écrire, pour tout n :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

Théorème 21 : (Règle d'Abel) :
Supposons que $u_n = \alpha_n v_n$ où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 et v_n est le terme général d'une série bornée. Alors $\sum u_k$ converge.

Remarque 22 : La transformation d'Abel est aux séries ce que l'intégration par parties est aux intégrales.

Exemple 23 : La série de terme général $e^{in\theta}/n^\alpha$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ est convergente pour $\alpha > 0$.

C Produit de Cauchy J'int 9.4.2

Théorème 24 : (Produit de Cauchy)
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. La série de terme général : $\sum_{p+q=n} a_p b_q$ appelée série produit de Cauchy est absolument convergente et on a
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right)$$

Application 25 : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $\exp(z+z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$

D Séries entières X.G 4.4

Définition 25 :
On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 26 : (lemme d'Abel) $z_0 \neq 0$
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors
i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
ii) $\forall r \in]0, |z_0|[$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $B(0,r)$

Définition 26 : (Rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geq 0 \mid$ la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée$\}$ $\in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ s'appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exemple 27 : La série $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Développement}}$: Théorème d'Abel + exemples.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

Alors : $$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Ajouter exemple et théorème taubérien.

On peut remplacer III D par une partie 4.

IV Séries entières et séries de Fourier.

A Séries entières X. G 4.4.1

↳ développement : Abel angulaire + exemples

B Séries de Fourier X. G 4.5

Références :

Xavier Gourdon Analyse X. G

J'intègre MP-MP* J'int