228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

I Généralités autour de la continuité et de la dérivabilité

A Définitions et exemples X. G 2.1 J'int 5.1.

<u>Définition 1</u> : On dit que f est continue sur I lorsque :
$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

<u>Définition 2</u> : On dit que f dérivable sur I lorsque :
$\forall a \in I$, $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I \setminus \{a\}}} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe. On note $f'(a)$ cette limite.

+ d'exemples

Exemples 3 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable.
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée non continue.

<u>Proposition 4</u> : Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I. La réciproque est fausse (cf exemples 3).

<u>Définition 5</u> : On dit que f est uniformément continue sur I lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
unif. cont. $\to$ cont.

Exemple 6 : Toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

B Propriétés de stabilité et dérivations successives X. G 2.1

<u>Proposition 7</u> : Soit C l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors C est stable par somme, par produit et par composition.

<u>Proposition 8</u> : Soit D l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Alors D est stable par somme, produit et composition.
donner les formules

Exemples 9 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x + e^{e^x} \cdot x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>Proposition 10</u> : (Formule de Leibniz). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent. Alors le produit fg est n fois dérivable en a et :
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a).$$

Exemple 11 : Avec les mêmes notations on a $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

<u>Proposition 12</u> : Soit f une bijection de I dans J (deux intervalles de $\mathbb{R}$), dérivable en $a \in I$. L'application f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et on a :
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$
exemples $\cos(\alpha \arcsin(t))' = -\alpha/\sqrt{1-t^2} \times \sin(\alpha \arcsin t)$ $t \in]-1,1[$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

II Résultats autour de la continuité et de la dérivabilité

A Théorème des valeurs intermédiaires X. G 1.3.4 + exo.

<u>Théorème 13</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a < b \in I$ et si $t \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = t$.

Exemple 14 : Tout pol de degré impair sur $\mathbb{R}$ admet au moins une racine réelle.

<u>Théorème 15</u>. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue (avec $a < b \in \mathbb{R}$). Alors f est bornée et atteint ses bornes.

B Théorème de Heine X. G 2.1.3.4 + exo

<u>Théorème 16</u> : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors f est uniformément continue.

Exemple 17 : $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
ajouter ex et app (voir exo gourdon) Application : thm de Weierstrass ! Démo

C Théorème de Rolle. X. G 2.1.3

<u>Théorème 18</u> : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 19 : Tout polynôme du second degré vérifie les conditions du théorème de Rolle. Donc pour tout $P(X) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $P'(d) = 0$ mauvais exemple (résultat évident)

Théorème des accroissements finis 19 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Règle de l'Hopital 20 : Soient f, g deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)/g'(x)$ existe alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)/g(x) = l$

D Formules de Taylor X.G 2.1.3

ex ?

appl ?

Formule de Taylor-Lagrange 21 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

cohérence

Formule de Taylor-Young 22 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et F une fonction définie sur I, à valeurs dans E un $\mathbb{R}$evnormé de classe C^n sur I. Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \to 0$ on a :

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

Formule de Taylor reste intégral 23 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et une application $F : [a,b] \to E$ de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, où E est un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Alors :

$$F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$\boxed{\text{Développement}}$ [Méthode de Newton]

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, où $c < d$ et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors en notant a l'unique zéro de f, on a :

i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : il existe $C > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

ii) si de plus $f'' > 0$ sur $[c,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$

III Théorèmes de passage à la limite

A Suites de fonctions J'int chapitre 10.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème (de la double limite) 24 : Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n a une limite finie en $a \in \bar{A}$ ou $a = \pm\infty$, alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la fonction f a une limite en a et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Contre-exemple 25 : Pour $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Théorème 26 : Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si toutes les fonctions f_n sont continues sur I alors f est continue sur I.

ex. ou contre-ex ? CU => CS

Théorème 27 : Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $[a,b]$ dans un espace de Banach E. On suppose que :

i) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.

ii) la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f C^1 vérifiant $f' = g$.

Application : une série entière est C^∞ sur son rayon de convergence. ⚠ sur le bord. par exemple $\sum_{n\geq 0} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$ définie pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1+z} \underset{z\to 1}{\to} \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.

B Intégrales dépendant d'un paramètre. J'int 13.2

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. } tu peux en parler mais il faut être à l'aise

Théorème (continuité sous le signe intégrale) 28 :

Soient I et $f : I \times E \to \mathbb{R}$ ~~tel que~~ → ordre des variables

i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable

ii) pour μ-presque tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en $t_0 \in I$

iii) il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$ μ-pp

Alors $t \mapsto \int_E f(t,x)\,d\mu(x)$ est bien définie sur I et continue en t_0.

Application : La fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Théorème (dérivation sous le signe intégrale) 29 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur E

ii) pour μ presque tout x, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I.

iii) il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ μ pp

Alors $F : t \mapsto \int_E f(t,x)\,d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : t \mapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$

Développement prenant $f:(t,x)\mapsto e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}$, on montre que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Références :

J'intègre Tout-en-un MP-MP*

J'assure aux concours MPSI

X.G Maths en tête

J.M.A Analyse.